# EKSENEL ÇEKMEYE MARUZ DELİKLİ PLAKTA GİRİNTİ PROBLEMİNİN ANALİTİK VE SAYISAL İNCELENMESİ

**Adnan YAKUPOĞLU**

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# EKSENEL ÇEKMEYE MARUZ DELİKLİ PLAKTA GİRİNTİ PROBLEMİNİN ANALİTİK VE SAYISAL İNCELENMESİ

Adnan YAKUPOĞLU
0000-0001-6871-3427

Prof. Dr. Yaşar PALA
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2024
**Her Hakkı Saklıdır**

**TEZ ONAYI**

Adnan YAKUPOĞLU tarafından hazırlanan "EKSENEL ÇEKMEYE MARUZ DELİKLİ PLAKTA GİRİNTİ PROBLEMİNİN ANALİTİK VE SAYISAL İNCELENMESİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Yaşar PALA
0000-0003-0358-1958

**Başkan :** Prof. Dr. Yaşar PALA İmza
0000-0003-0358-1958
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Mühendislik Fakültesi,
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

**Üye :** Prof. Dr. Hüseyin LEKESİZ İmza
0000-0003-3350-1509
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

**Üye :** Dr. Öğr. Üyesi Kenan TÜFEKÇİ İmza
0000-0001-5358-1396
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Mühendislik Fakültesi,
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof. Dr. Ali KARA**
**Enstitü Müdürü**
**../../….**

**B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**02/02/2024**

**Adnan YAKUPOĞLU**

**TEZ YAYINLANMA**
**FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI**

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

| | |
|---|---|
| Prof.Dr. Yaşar PALA | Adnan YAKUPOĞLU |
| 02.02.2024 | 02.02.2024 |

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

EKSENEL ÇEKMEYE MARUZ DELİKLİ PLAKTA GİRİNTİ PROBLEMİNİN ANALİTİK VE SAYISAL İNCELENMESİ

**Adnan YAKUPOĞLU**

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. Yaşar PALA

Bu çalışmada çekme, kayma gerilmesi altında delikli dikdörtgen plakadaki girinti problemi analitik olarak incelenmiştir. Öncelikle delikli plakadaki gerilme dağılımını veren ifadeler çıkarılmıştır. Girinti sebebiyle delik içerisinde oluşacak basıncı içeren bu gerilme ifadeleri kullanılarak plakada yer değiştirme analizi yapılmıştır. Delik içerisine dahil olacak olan silindirdeki yer değiştirme analizi ayrı olarak ele alınmıştır. Yapılan yer değiştirme analizinin sonuçları kullanılarak, girinti miktarına bağlı basınç $p$ ifadesi çıkarılmıştır. Malzeme özelliklerine bağlı uygulanabilecek girinti miktarının alt ve üst limitleri belirlenmiştir. Elastik akma noktasını aşmayacak şekilde uygulanabilecek maksimum basınç ifadesi verilmiştir. Çekme ve saf kayma altındaki delikli plakalardaki girinti problemi incelenmiş ve bulunan sonuçlar değerlendirilmiştir. Bulunan denklemler Matlab programı kullanılarak çözdürülmüş ve bulunan sonuçlar görsel olarak ifade edilmiştir. Matlab da elde edilen sonuçlar bir sonlu elemanlar programı kullanılarak elde edilen sonuçlar ile birlikte verilmiş, yüzde farkları tablo halinde gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Press geçme, Gerilme dağılımı, Delikli plaka, Gerilme fonksiyonu, Girinti problemi
**2023, viii + 56 sayfa.**

## ABSTRACT

MSc Thesis

ANALYTICAL INVESTIGATION OF INCLUSION PROBLEM OF A CYLINDER INTO A HOLE INCLUDED IN AN AXIALLY LOADED RECTANGULAR PLATE

**Adnan YAKUPOĞLU**

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering

**Supervisor:** Prof. Dr. Yaşar PALA

In this study, the inclusion problem in a perforated rectangular plate under tensile and shear stresses are analyzed analytically. First, the expressions giving the stress distribution in the perforated plate are obtained. Displacement analysis is performed on the plate using these stress expressions, which include the pressure that will occur in the hole due to the inclusion. The displacement analysis in the cylinder perforated into the hole is discussed separately. Using the results of the displacement analysis, the pressure $(p)$ expression depending on the amount of inclusion has been derived. Lower and upper limits of the amount of inclusion that can be applied depending on the material properties have been determined. The maximum pressure that can be applied without exceeding the elastic yield point is given. The inclusion problem in the perforated plates under tension and pure shear was examined and the results were evaluated. The results are solved using the Matlab program and expressed visually for comparison. Numerical and visual results obtained in Matlab are compared point by point with the results obtained using a finite element analysis program, and the results obtained are shown in a table with their percentage differences.



**Key words:** Press-fitting, Stress distribution, Rectangular plate, Hole, Inclusion problem, Stress function
**2023, viii + 56 pages.**

## TEŞEKKÜR

Yüksek öğrenimim boyunca bana sürekli yardımcı olmaya çalışan ve yol gösteren, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum danışman hocam Prof. Dr. Yaşar PALA ‘ya teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek öğrenimim boyunca bana sürekli moral vererek destek olan Gökhan YILDIZ ‘a teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, beni hep destekleyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Adnan YAKUPOĞLU
02/02/2024

# İÇİNDEKİLER


| | Sayfa |
|---|---|
| ÖZET | i |
| ABSTRACT | ii |
| TEŞEKKÜR | iii |
| SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ | v |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | vi |
| ÇİZELGELER DİZİNİ | viii |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI | 2 |
| 2.1. Düzlem Gerilme ve Düzlem Şekil Değiştirme | 4 |
| 2.2. Uygunluk (tamlık) Denklemleri | 5 |
| 2.3. Denge Denklemleri | 5 |
| 2.4. Hooke Kanunu | 6 |
| 2.5. Gerilme Fonksiyonu | 7 |
| 2.6. Kutupsal Koordinatlarda İki Boyutlu Problemler | 8 |
| 2.7. Simetrik Gerilme Dağılımı | 8 |
| 2.8. Kutupsal Koordinatlarda Şekil Değiştirme | 9 |
| 2.9. Levhalardaki Gerilme Dağılımı ve Delik Etkisi | 10 |
| 3. MATERYAL VE YÖNTEM | 13 |
| 3.1. Eksenel Çekmeye Maruz Delikli Plakada Girinti Problemi | 13 |
| 3.1.1. Sonsuz delikli plakada girinti problemi | 13 |
| 3.1.2. Eksenel çekmeye maruz plakada girinti problemi | 15 |
| 3.2. İki Yönlü Eksenel Çekmeye Maruz Delikli Plakada Girinti Problemi | 20 |
| 3.3. Kaymaya Maruz Delikli Plakada Girinti Problemi | 22 |
| 4. BULGULAR VE TARTIŞMA | 35 |
| 4.1. Eksenel Çekmeye Maruz Delikli Plaka | 35 |
| 4.2. Kaymaya Maruz Delikli Plaka | 45 |
| 5. SONUÇ | 53 |
| KAYNAKLAR | 54 |
| ÖZGEÇMİŞ | 56 |

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

| Simgeler | Açıklama |
|---|---|
| $\sigma_z$ | Normal gerilme *z* yönündeki |
| $\tau_{xz}$ | Kayma gerilmesi *xz* yönündeki |
| $\tau_{yz}$ | Kayma gerilmesi *yz* yönündeki |
| $\varepsilon_x$ | Birim şekil değiştirme *x* yönündeki |
| $\varepsilon_y$ | Birim şekil değiştirme *y* yönündeki |
| $\varepsilon_z$ | Birim şekil değiştirme *z* yönündeki |
| $\gamma_{xy}$ | Kayma birim şekil değiştirme *xy* yönündeki |
| $\gamma_{xz}$ | Kayma birim şekil değiştirme *xz* yönündeki |
| $\gamma_{yz}$ | Kayma birim şekil değiştirme *yz* yönündeki |
| $\sigma_{\mathrm{x}}$ | Normal gerilme *x* yönündeki |
| $\sigma_{\mathrm{y}}$ | Normal gerilme *y* yönündeki |
| $E$ | Elastisite modülü |
| $\nu$ | Poisson oranı |
| $G$ | Kayma modülü |
| $\varphi$ | Airy gerilme fonksiyonu |
| $\rho$ | Yoğunluk |
| $g$ | Yer çekimi ivmesi |
| $\sigma_r$ | Normal gerilme *r* yönünde |
| $\sigma_\theta$ | Normal gerilme $\theta$ yönünde |
| $\theta$ | Dönme açısı |
| $S$ | Dışarıdan uygulanan çekme gerilmesi |
| $\tau_{r\theta}$ | Kayma gerilmesi $r\theta$ yönünde |
| $r$ | Yarıçap |
| $r_d$ | Dış çap |
| $r_i$ | İç çap |
| $p$ | Basınç |
| $p_d$ | Dış basınç |
| $u$ | Yer değiştirme miktarı *r* yönünde |
| $v$ | Yer değiştirme miktarı $\theta$ yönünde |
| w | Yer değiştirme miktarı $z$ yönünde |
| $\delta$ | Girinti miktarı |
| $\Delta d$ | Silindirdeki yer değiştirme |
| $\Delta r_i$ | Delik kenarındaki yer değiştirme |
| $\sigma$ | Dışarıdan uygulanan çekme gerilmesi |
| $\sigma_{vm}$ | Von-mises gerilmesi |
| $p_{max}$ | Akma gerilmesi sınırında maksimum basınç |
| $\tau_0$ | Dışarıdan uygulanan kayma gerilmesi |
| $\gamma_{r\theta}$ | Kayma birim şekil değiştirme *r* $\theta$ yönündeki |
| $\sigma_{akma}$ | Akma gerilmesi |

## ŞEKİLLER DİZİNİ


| | | Sayfa |
|---|---|---|
| Şekil 2.1. | Düzlem gerilme şekli…….. | 4 |
| Şekil 2.2. | İki boyutlu halde sonsuz küçük eleman üzerindeki gerilmeler…….. | 6 |
| Şekil 2.3. | Kutupsal koordinatlarda yer değiştirmeler…….. | 9 |
| Şekil 2.4. | Eksenel çekmeye maruz levha…… | 10 |
| Şekil 3.1. | A) Delik kenarı basınca maruz sonsuz plaka<br>B) İç ve dış basınca maruz silindir…….. | 13 |
| Şekil 3.2. | A) $\sigma_r/E$ nin $r_i/r$ ile değişimi $(x = \delta/ri)$<br>B) $\sigma_\theta/E$ nin $r_i/r$ ile değişimi $(x = \delta/ri)$…….. | 15 |
| Şekil 3.3. | $\sigma$ gerilmesi ile yüklenmiş delikli plaka……... | 16 |
| Şekil 3.4. | İki yönlü eksenel çekmeye maruz delikli plaka…….. | 21 |
| Şekil 3.5. | $\tau_0$ gerilmesi ile yüklenmiş delikli plaka……. | 23 |
| Şekil 3.6. | Yükleme şekli için delik çevresindeki deformasyonun görüntüsü…. | 32 |
| Şekil 4.1. | Eksenel çekmeye maruz plakanın mesh ağı görüntüsü<br>A) Plaka B) Delik çevresi…….. | 36 |
| Şekil 4.2. | Ansys modelinin yükleme şekli<br>A) Eksenel çekmeye maruz plaka<br>B) İki yönlü eksenel çekmeye maruz plaka…… | 36 |
| Şekil 4.3. | Eksenel çekmeye maruz plakada 80 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar<br>A) Matlab B) Ansys…… | 37 |
| Şekil 4.4. | Eksenel çekmeye maruz plakada 80 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar<br>A) Matlab B) Ansys…… | 37 |
| Şekil 4.5. | Eksenel çekmeye maruz plakada 50 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar<br>A) Matlab B) Ansys…… | 38 |
| Şekil 4.6. | Eksenel çekmeye maruz plakada 50 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar<br>A) Matlab B) Ansys…… | 38 |
| Şekil 4.7. | Eksenel çekmeye maruz plakada 20 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar<br>A) Matlab B) Ansys…… | 39 |
| Şekil 4.8. | Eksenel çekmeye maruz plakada 20 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar<br>A) Matlab B) Ansys…… | 39 |
| Şekil 4.9. | İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 120 MPa ve $\delta''$ için<br>sonuçlar A) Matlab B) Ansys…….. | 41 |
| Şekil 4.10. | İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 120 MPa ve $\delta''$ için<br>sonuçlar A) Matlab B) Ansys…….. | 41 |
| Şekil 4.11. | İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 80 MPa ve $\delta''$ için<br>sonuçlar A) Matlab B) Ansys…….. | 42 |
| Şekil 4.12. | İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 80 MPa ve $\delta''$ için<br>sonuçlar A) Matlab B) Ansys…….. | 42 |
| Şekil 4.13. | İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 40 MPa ve $\delta''$ için<br>sonuçlar A) Matlab B) Ansys…….. | 43 |
| Şekil 4.14. | İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 40 MPa ve $\delta''$ için<br>sonuçlar A) Matlab B) Ansys…….. | 43 |
| Şekil 4.15. | Kaymaya maruz plakanın mesh ağı görüntüsü<br>A) Plaka B) Delik çevresi……... | 45 |
| Şekil 4.16. | Ansys modelinin yükleme şekli…….. | 45 |
| Şekil 4.17. | $p/\tau_0$ değerleri için $\sigma_r/\tau_0$ ın $r_i/r$ ile değişimi……. | 46 |
| Şekil 4.18. | $p/\tau_0$ değerleri için $\sigma_\theta/\tau_0$ ın $r_i/r$ ile değişimi…… | 46 |

Şekil 4.19. $p/\tau_0$ değerleri için $\sigma_r/\tau_0$ ın $r_i/r$ ile değişimi……. 47
Şekil 4.20. $p/\tau_0$ değerleri için $\sigma_\theta/\tau_0$ ın $r_i/r$ ile değişimi…… 48
Şekil 4.21. Kaymaya maruz plakada 40 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
A) Matlab B) Ansys…… 49
Şekil 4.22. Kaymaya maruz plakada 40 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
A) Matlab B) Ansys…… 49
Şekil 4.23. Kaymaya maruz plakada 30 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
A) Matlab B) Ansys…… 49
Şekil 4.24. Kaymaya maruz plakada 30 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
A) Matlab B) Ansys…… 50
Şekil 4.25. Kaymaya maruz plakada 20 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
A) Matlab B) Ansys…… 50
Şekil 4.26. Kaymaya maruz plakada 20 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
A) Matlab B) Ansys…… 50

# ÇİZELGELER DİZİNİ

**Sayfa**

Çizelge 4.1. Eksenel çekmeye maruz plaka için analitik ve FEA gerilme değerlerinin karşılaştırılması……..... 40
Çizelge 4.2. İki yönlü eksenel çekmeye maruz plaka için analitik ve FEA gerilme değerlerinin karşılaştırılması……. 44
Çizelge 4.3. Kaymaya maruz plaka için analitik ve FEA gerilme değerlerinin karşılaştırılması…….. 51

# 1. GİRİŞ

Makine mühendisliğinde tasarlanan makine parçalarına gelen yüklerin, parçaların hangi şartlar altında çalışacağının ve bu şartlarda nasıl davranış göstereceğinin önceden bilinmesi oldukça önemlidir. Bu amaçla press-geçme gibi uygulamalarda meydana gelecek ön gerilmenin bilinmesi kritik önem taşımaktadır. Gerçek uygulama problemlerinde genellikle bu şartların tamamının bilinmesi mümkün olmamaktadır. Bu nedenle problemlerin çözümünde belli basitleştirmeler yaparak kabul edilebilir bir hata payıyla problem çözümleri yapılmaktadır. Yaygın olarak kullanılan elemanter mukavemet kabul edilebilir bir hata payıyla problemlerin çözümlerine hızlı sonuç vermektedir. Fakat bazı özel durumlarda elementer mukavemet ile hesaplayamayacağımız parça üzerindeki gerilme dağılımlarını bilmek isteriz. Bu gibi gereksinimleri karşılayabilmek için elastisite teorisinin vereceği sonuçları tayin etmek gerekmektedir. Bu çalışmada elastisite teorisinin temel denklemleri kullanılarak delikli bir dikdörtgen plakada gerilme dağılımları araştırılmış, çekme ve kayma yüklemesi altında plakada bulunan delikte meydana gelecek girinti miktarına bağlı oluşan gerilme dağılımları incelenmiştir. Analitik sonuçları elde edebilmek için Airy gerilme fonksiyonundan faydalanılmıştır. Airy gerilme fonksiyonu çözümü ile problemde uygun sınır şartları kullanılarak, çekme ve kayma yüklemesine maruz delikli plakadaki gerilme dağılımını veren ifadeler elde edilmiştir. Elastisite teorisinin yer değiştirme ve tamlık denklemleri kullanılarak yer değiştirme analizi yapılmış, çekme ve kayma yüklemesine maruz delikli plaka için girinti ifadeleri elde edilmeye çalışılmıştır. Plakada girinti miktarına bağlı meydana gelecek temas basıncı ifadesi elde edilmiştir. Plaka malzemesine bağlı olarak verilebilecek girinti miktarlarının alt ve üst limitleri irdelenmiştir. Ayrıca plaka malzemesinin akma gerilmesine ulaşacağı maksimum temas basıncı ifadesi verilmiştir. Elde edilen analitik çözümler kullanılarak Matlab ortamında elde edilen gerilme dağılımları görsel olarak ifade edilmiştir. Analitik sonuçlarla elde edilen gerilme dağılımı grafikleri, bir sonlu elemanlar programı olan Ansys'den elde edilen sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Elde edilen gerilme dağılımı benzerliğini kuvvetlendirmek için noktasal olarak, rastgele seçilen koordinatlardan elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır. Noktasal koordinatlardan elde edilen sonuçlar tablo halinde verilmiş ve yüzde olarak farkları belirtilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Timoshenko & Goodier, (1951) sonsuz bir plakadaki bir delik etrafında gerilmelerin bölgesel karakterini incelemişlerdir. Deliğin etrafındaki gerilmelerin deliğin ve levhanın boyutuna doğrudan bağlı olduğu tespitini yapmışlardır. Levha ve delik boyutlarına bağlı olarak maksimum gerilmelerin hangi $\theta$ açısında meydana geleceğini ve gerilme değerlerini hesaplamışlardır.

Schlack & Little, (1964); Thompson, (1965) sonlu boyutlu delikli plaka halinde çözüm, zayıf bir şekilde de olsa delik çapına bağlı olmalıdır. Bu niyetle sonlu boyuta sahip delikli plaka için en küçük kareler yöntemi yardımıyla sayısal çözümler elde etmişlerdir. Sonlu haldeki delikli plaka çözümünün, sonsuz haldekinden önemli ölçüde farklı olduğunu göstermişlerdir.

Lekhnitskii, (1968) yanlarından çekme gerilmesi veya kayma gerilmesi ile yüklenmiş, düz delikli bir plakaya silindir çakma problemini karmaşık fonksiyon teorisi kullanarak ayrıntılı olarak incelemiştir.

Venkatraman & Patel, (1970) önemli bir pratik hal olarak $\sigma$ eksenel gerilmesiyle yüklenmiş delikli sonsuz bir plakadaki gerilme dağılımı şık bir yöntem sayesinde analitik olarak çözümlenebilmektedir. İç ve dış $p$ basıncına maruz kalın cidarlı silindir için gerilme dağılımı bağıntılarını vermişlerdir.

Hsu & Forman, (1975) delik kenarında basınca maruz, bir deliğe sahip levhada gerilme dağılımını incelemişlerdir. Elastik ve plastik bölgedeki deformasyon sonuçlarını Budiansky kriterine göre değerlendirmişlerdir. Basıncın kaldırılmasıyla delik etrafında artık gerilmelerin meydana geldiğini belirtmişlerdir.

Zhang ve ark., (2000) dairesel dişlinin bir tekerleğe sıkı geçme montajını FEM yazılımı kullanarak incelemişlerdir. FEM' den elde ettikleri sonuçları, Lame denkleminin sonuçlarıyla karşılaştırmışlardır. Tekerleğin çapındaki değişimin FEM' de daha az olduğunu belirtmişlerdir. Bu nedenle FEM ile elde edilen sonuçların daha büyük ve daha güvenilir olduğunu ifade etmişlerdir.

Pala & Güllü, (2002) delikli sonsuz plakalardaki girinti problemini incelemişlerdir. İlk olarak sınırı yüklemesiz delikli sonsuz plakadaki girinti probleminde gerilme dağılımını ifade etmişlerdir. Silindirin burulma momenti taşıdığı hal buna ilave edilmiştir. Eksenel çekme yüklemesi altındaki dikdörtgensel sonsuz plakadaki girinti problemini de irdelemişlerdir. Ara yüzey basıncını elde etmek için iki farklı yöntem önermişlerdir.

Özel ve ark., (2005) geometrik özelliklerin gerilme ve deformasyon üzerine etkilerini belirlemek için mil-göbek sıkı geçme bağlantılarında sonlu elemanlar yöntemini kullanarak gerilme ve deformasyonları analiz etmişlerdir. Elde ettikleri sonuçları Lame denkleminden elde ettikleri sonuçlar ile karşılaştırmışlardır. Sıkı geçme işlemi sırasında, ilk temas anında plastik bölgeye geçilebildiğini ve bunun tasarım parametresi olarak dikkate alınması gerektiğini belirtmişlerdir.

Öztürk, (2011) temas basıncını belirlemek için iki diskli bir sıkı geçme düzeneğini bir FEA yazılımı kullanarak modellemiş ve analizini yapmıştır. Hem içi boş mil hem de içi dolu mil için hesaplamaları tekrarlamıştır. İçi dolu mil düzeneğinde, mil için uniform gerilme dağılımı, disk için uniform olmayan gerilme dağılımı olduğunu belirtmiştir.

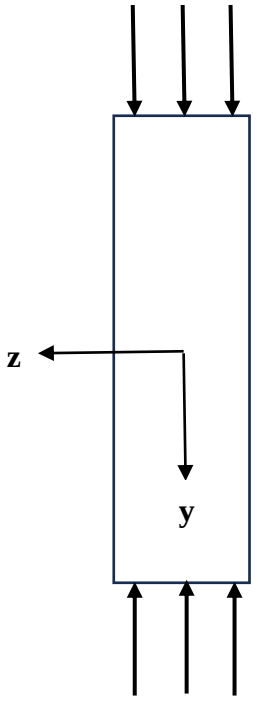
Qui & Zhou, (2016) çok katmanlı silindirlerde girinti problemlerini incelemişlerdir. Temas basıncını hesaplamak için analitik bir yöntem önermişlerdir. Verilen yöntem bir motor ve krank mili modeli kullanılarak incelenmiştir. Aynı modeli bir FEA yazılımı ile analiz etmişler, elde edilen sonuçları karşılaştırmışlardır. Verilen yöntemi ön tasarımlarda parametre optimizasyonu için kullanılmasını önermişlerdir.

Wank ve ark., (2018) sıkı geçme işleminde karşı bir direnç kuvveti oluştuğunu belirtmişlerdir. Bu nedenle temas etmeyen bölgenin etkisi hesaba katılmadan yapılan sıkı geçme kuvvet hesabının doğru olamayacağından bahsetmişlerdir. Sıkı geçme işleminde temas etmeyen bölgenin etkisini hesaba katan bir teorik model önermişlerdir.

Campos & Hall, (2019) sıkı geçme işleminde temas basıncını ve radyal gerilmeyi belirlemek için Lame denklemlerinin basitleştirilmiş halini sunmuşlardır. Sıkı geçme işlemini ince cidarlı silindirik bileşenlere uygulandığını varsayan iki basitleştirilmiş denklem ortaya koymuşlardır. Elde ettikleri sonuçları literatürdeki diğer çalışmalar ve FEA sonuçlarıyla karşılaştırmışlardır.

## 2.1. Düzlem Gerilme ve Düzlem Şekil Değiştirme

İnce bir plaka sınırından plaka düzlemine paralel olan ve kalınlık boyunca düzgün yayılan kuvvetle yüklenirse $\sigma_z$, $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$ gerilme bileşenleri plakanın $z$ yönündeki iki yüzünde de sıfır olur ve bu gerilme bileşenleri plakanın iç kısmında da sıfır oldukları kabul edilebilir. Bu sebeple gerilme yayılışı yalnız $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$ bileşenleri ile tayin edilir ve düzlem gerilme adını alır (Timoshenko & Goodier, 1951).




**Şekil 2.1** Düzlem gerilme şekli (Timoshenko & Goodier, 1951)

Düzlem şekil değiştirmede problem iki boyutlu hale geleceğinden $z$ boyutundaki şekil değiştirme ve kayma şekil değiştirme oranları sıfır olacaktır (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.3}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.4}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{2.5}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{2.6}$$

## 2.2. Uygunluk (tamlık) Denklemleri

$\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$ gibi üç gerilme bileşenini içeren problemlerde, bu üç gerilme ifadesinin belirlenebilmesi için denge ifadeleri yeterli değildir. Problem statikçe belirsizdir ve çözümü elde etmek için cismin elastik şekil değiştirme durumunu da göz önüne almak gerekir. İki boyutlu problemlerde yalnız denklem 2.1, 2.2 ve 2.4 ile verilen üç şekil değiştirme oranı ifadesini ele almak yeterlidir (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Bu üç şekil değiştirme ifadesi *u* ve *v* gibi iki fonksiyonla verildiklerine göre keyfi olarak seçilemezler ve aralarında matematiksel bir bağıntı vardır. Yukarıdaki ifadelerden ilkini *y*'ye göre, ikincisini *x*'e göre iki kere, üçüncüsünün de bir defa *x*'e göre bir defa da *y*'e göre türevleri alınarak elde edilebilen denklem 2.7 uygunluk(tamlık) şartı olarak ifade edilir.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

Denklem 2.7 ile verilen diferansiyel denklem *u* ve *v* fonksiyonlarını elde etmek için gerilme bileşenlerinin sağlamaları gereken ifadedir (Timoshenko & Goodier, 1951).

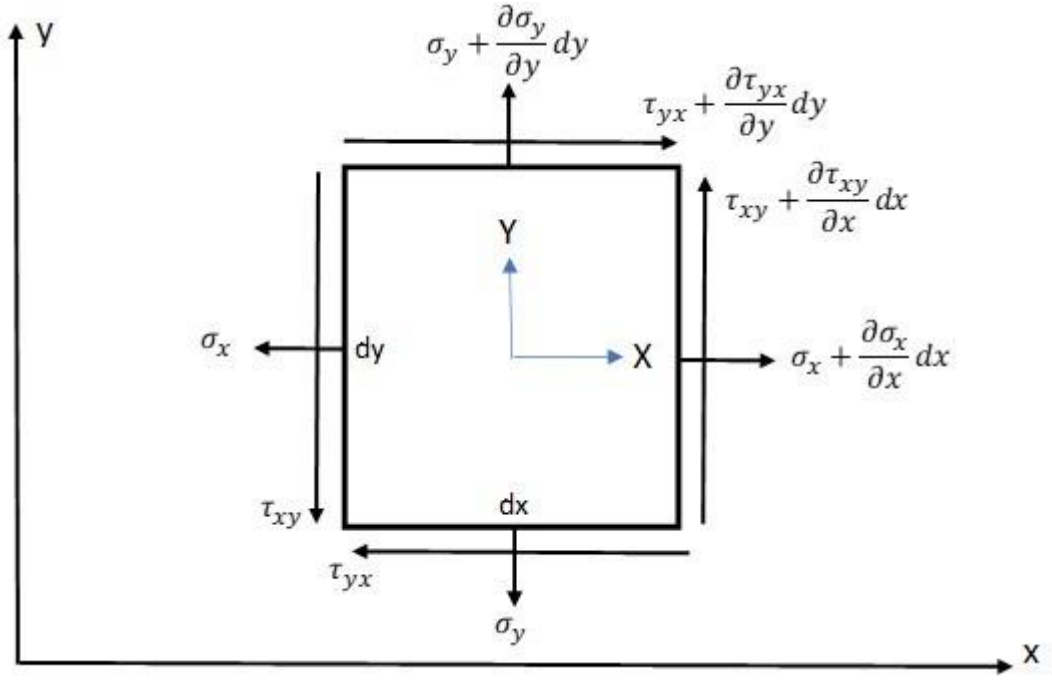
## 2.3. Denge Denklemleri

Düzlem gerilme yani iki boyutlu durumda iki adet diferansiyel denge denklemi olacaktır. Cisim kuvvetlerini *X* ve *Y* ile gösterip, cismin birim hacim başına kütlesini $\rho$ alarak iki

boyutlu halde gerilmelerin sağlaması gereken denge denklemleri 2.8 ve 2.9 şeklinde oldukları gösterilir (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0 \tag{2.9}$$




**Şekil 2.2** İki boyutlu halde sonsuz küçük eleman üzerindeki gerilmeler (Martin, 2009)

## 2.4. Hooke Kanunu

Gerilme bileşenleri ve şekil değiştirme bileşenleri arasındaki bağıntı deneysel olarak bulunmuştur ve Hooke kanunu adını alır. Meydana gelen şekil değiştirme oranlarını her yöndeki gerilmeler için süperpoze ederek aşağıdaki denklemler elde edilebilir (Timoshenko & Goodier, 1951):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \tag{2.11}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \tag{2.12}$$

## 2.5. Gerilme Fonksiyonu

İki boyutlu hal için 2.7 denklemi ile verilen uygunluk denklemi, Hooke bağıntıları olarak verilen denklemler kullanılarak gerilme bileşenleri arasındaki ilişkiyi ifade eden bir bağıntıya dönüştürülebilir:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \tag{2.14}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \tag{2.15}$$

Yukarıda verilen üç denklem 2.7 de yerine konularak 2.16 denklemi bulunabilir (Timoshenko & Goodier, 1951):

$$\frac{\partial}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{2.16}$$

Elde edilen 2.16 denklemi denge denklemleri kullanılarak farklı şekilde yazılabilir. 2.8 ve 2.9 denklemlerinde ilk denklemin *x*'e göre, ikincisinin *y*'ye göre türevleri alınarak toplanırsa 2.17 denklemi elde edilir. 2.17 den kayma gerilmesi ifadesi çekilip 2.16 da yerine konularak 2.18 denklemi elde edilir (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = 0 \tag{2.17}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \tag{2.18}$$

Yukarıdaki denklemlerin çözülmesinde kullanılan yaygın yöntem gerilme fonksiyonu adıyla yeni bir fonksiyonun ortaya konmasıdır. Bu gerilme fonksiyonu farklı kaynaklarda Airy gerilme fonksiyonu olarak da bilinmektedir. 2.8 ve 2.9 denklemlerini ele alarak *x* ve *y*'nin $\varphi$ gibi herhangi bir fonksiyonunu alıp, gerilme bileşenleri için 2.19 ifadeleri kullanılarak sağlanabilirler (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \rho g y \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho g y \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tag{2.19}$$

Gerilmeler aynı zamanda 2.18 denklemini de sağlamalıdır. Gerilme bileşenleri için verilen 2.19 ifadelerini 2.18 de yerine koyarak, gerilme fonksiyonunun 2.20 denklemini sağlaması gerektiği sonucuna varırız (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\nabla^4 \varphi = \nabla^2(\nabla^2 \varphi) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \tag{2.20}$$

## 2.6. Kutupsal Koordinatlarda İki Boyutlu Problemler

Dairesel halkalar, diskler ve dairesel kesitli gerilmeleri incelerken kutupsal koordinatları kullanmak problemin çözümüne ulaşmada fayda sağlamaktadır. İki boyutlu ve ağırlığının ihmal edildiği düzlemsel problemleri kutupsal koordinatlarda incelediğimiz zaman 2.19 daki gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \tag{2.21}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \tag{2.22}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) \tag{2.23}$$

Kartezyen koordinatlarda 2.20 ile verilen Biharmonik denklem dönüşüm denklemleri yardımıyla yeniden yazılıp gerekli türevler alınarak kutupsal koordinatlarda 2.24 eşdeğer denklemi elde olunur. Elde edilen bu kısmi diferansiyel denklem sınır şartları altında çözülerek gerilmeler elde edilir (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\nabla^4 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = 0 \tag{2.24}$$

## 2.7. Simetrik Gerilme Dağılımı

Gerilme yayılışı *xy* düzlemine dik olan bir eksen etrafında orjine göre simetrik ise, $\theta$'ya bağlı olmaz ve sadece *r*'nin fonksiyonu olur. Simetri sebebiyle $\tau_{r\theta}$ gerilme ifadesinin de mevcut olmaması gerekir. Ağırlık kuvvetinin olmadığı ve gerilme fonksiyonunun sadece *r*'ye bağlı olduğu halde 2.25 denklemi elde edilir (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)=\frac{d^4\varphi}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3\varphi}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d\varphi}{dr}=0 \tag{2.25}$$

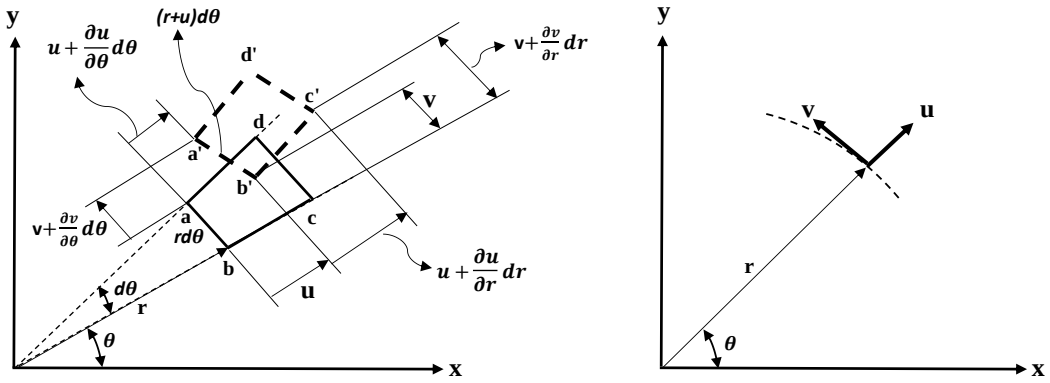
Bu adi diferansiyel denklem, $r=e^t$ gibi bir değişken dönüşümü yapılarak sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Simetrik gerilme dağılımı için verilen 2.25 denkleminin genel çözümünde sınır şartları ile tayin edilmesi gereken dört integrasyon sabiti bulunur. Yukarıdaki denklemin genel çözümü 2.26 denklemi şeklindedir. Genel çözüm 2.21 ve 2.22 denklemlerinde kullanılarak, sınır şartları ile sabitler bulunmalıdır (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$\varphi = \mathrm{Alnr} + Br^2\mathrm{ln}r + Cr^2 + D \tag{2.26}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1+2\mathrm{ln}r) + 2C \tag{2.27}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3+2\mathrm{ln}r) + 2C \tag{2.28}$$

## 2.8. Kutupsal Koordinatlarda Şekil Değiştirme




**Şekil 2.3** Kutupsal koordinatlarda yer değiştirmeler

İki boyutlu problemlerde kartezyen koordinatlarda olduğu gibi kutupsal koordinatlarda $r\ ve\ \theta$ doğrultularındaki şekil değiştirmelere ilave olarak kayma şekil değiştirme oranı olmak üzere üç adet aşağıdaki denklemler verilebilir. Benzer şekilde Hooke bağıntıları da aynı şekilde ifade edilebilir (Timoshenko & Goodier, 1951).

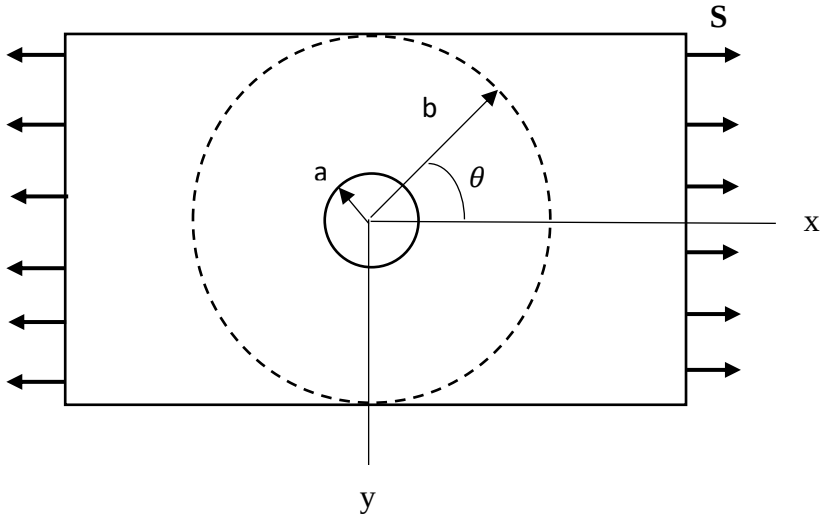
$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{2.29}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial \theta} \tag{2.30}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \tag{2.31}$$

## 2.9. Levhalardaki Gerilme Dağılımı ve Delik Etkisi

Şekil 2.4 de *x* doğrultusunda *S* şiddetinde çekme gerilmesine maruz bırakılmış sonsuz bir levha gösterilmiştir. Levha ortasına küçük bir delik açılması durumunda, deliğin civarındaki gerilme yayılışı farklılık gösterecektir. Bu noktada Saint-Venant prensibi kullanılarak, deliğin yarıçapına kıyasla uzak noktalarda gerilme yayılışındaki bu değişim ihmal edilebilir. Bu noktadaki gerilmeler pratik olarak deliksiz plakadaki gerilmelere eşittir. Buradan hareketle Şekil 2.4 de verilen levha için sonsuzdaki gerilmeler denklem 2.32 ve 2.33 ile verilir (Timoshenko & Goodier, 1951).




**Şekil 2.4** Eksenel çekmeye maruz levha (Timoshenko & Goodier, 1951)

$$(\sigma_r)_{r=b} = \frac{1}{2}S\big(1 + \cos(2\theta)\big) \tag{2.32}$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=b} = -\frac{1}{2}S\sin(2\theta) \tag{2.33}$$

Yukarıdaki 2.32 denklemine bakıldığında ilk kısım, gerilmenin sabit $\frac{1}{2}S$ bileşeninden gelen diğer kısım ise $\frac{1}{2}S\cos(2\theta)$ normal kuvveti ve denklem 2.33deki $-\frac{1}{2}S\sin(2\theta)$ ifadesi de kayma kuvvetinden dolayı oluşan gerilmeleri göstermektedir (Timoshenko & Goodier, 1951).

Delikli haldeki gerilme dağılımı için

$$\varphi = g(r) + f(r)\cos(2\theta) \tag{2.34}$$

kabul edelim. 2.34 denkleminde $g(r)$ fonksiyonunun çözümü 2.26 da verildiği gibidir. Şimdi $f(r)$ fonksiyonun çözümü için 2.35 denklemine müracaat ederek

$$\nabla^4\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right) = 0 \tag{2.35}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right)\cos(2\theta) = 0 \tag{2.36}$$

elde ederiz. Bu denklemin integrasyonu

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C\frac{1}{r^2} + D \tag{2.37}$$

şeklindedir. $g(r)$ fonksiyonunun

$$g(r) = A_2\ln r + B_2r^2\ln r + C_2r^2 + D_2$$

formunu hatırlayarak

$$\varphi = \left(Ar^2 + Br^4 + C\tfrac{1}{r^2} + D\right)\cos(2\theta) + A_2\ln r + B_2r^2\ln r + C_2r^2 + D_2 \tag{2.38}$$

yazabiliriz. 2.21, 2.22 ve 2.23 denklemlerine müracaat ederek gerekli türevleri alıp, yerine koymak suretiyle

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = \frac{A_2}{r^2} + B_2(1 + 2lnr) + 2C_2 - \left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right)\cos(2\theta) \tag{2.39}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = -\frac{A_2}{r^2} + B_2(3 + 2lnr) + 2C_2 + \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right)\cos(2\theta) \tag{2.40}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right)\sin(2\theta) \tag{2.41}$$

elde ederiz. Bilinmeyen sabitler problemin sınır şartlarından elde edilmelidir. Aşağıdaki denklem 2.42 ile verilen sınır şartları 2.32 ve 2.33 şartları kullanılarak sabitler aşağıdaki gibi elde olunur (Timoshenko & Goodier, 1951):

$$r = r_i \; için, \qquad \sigma_r = 0, \qquad \tau_{r\theta} = 0 \tag{2.42}$$

$$A = -\frac{\sigma}{4}, A_2 = -\frac{\sigma r_i^2}{2}, B = B_2 = 0, \qquad C = -\frac{\sigma r_i^4}{4}, C_2 = \frac{\sigma}{4}, D = \frac{\sigma r_i^2}{2}$$

Bu değerleri gerilme ifadelerinde kullanarak

$$\sigma_r = -\frac{\sigma r_i^2}{2r^2} + \frac{\sigma}{2} - (-\frac{\sigma}{2} - \frac{3\sigma r_i^4}{2r^4} + \frac{2\sigma r_i^2}{r^2})\cos(2\theta) \tag{2.43}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma r_i^2}{2r^2} + \frac{\sigma}{2} + (-\frac{\sigma}{2} - \frac{3\sigma r_i^4}{2r^4})\cos(2\theta) \tag{2.44}$$

$$\tau_{r\theta} = \left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{3\sigma r_i^4}{2r^4} - \frac{\sigma r_i^2}{r^2}\right)\sin(2\theta) \tag{2.45}$$

buluruz. Yukarıdaki denklemlerde görüleceği gibi $\theta = \frac{\pi}{2}\; veya\; \theta = \frac{3\pi}{2}$ için $\sigma_\theta$ en büyük değerini alır. Delik kenarında maksimum değerleri alan bu noktalarda $(\sigma_\theta)_{max} = 3\sigma$ olur. Bu levhada meydana gelen en büyük çekme gerilmesidir ve levhanın uçlarına uygulanan $\sigma$ çekme gerilmesinin üç katıdır. Yukarıdaki sonuçlara göre delik etkisi büyük ölçüde bölgesel bir karaktere sahiptir ve $r$ arttıkça $\sigma_\theta$ hızla $\sigma$ değerine yaklaşır (Timoshenko & Goodier, 1951).

# 3. MATERYAL VE YÖNTEM

## 3.1. Eksenel Çekmeye Maruz Delikli Plakada Girinti Problemi

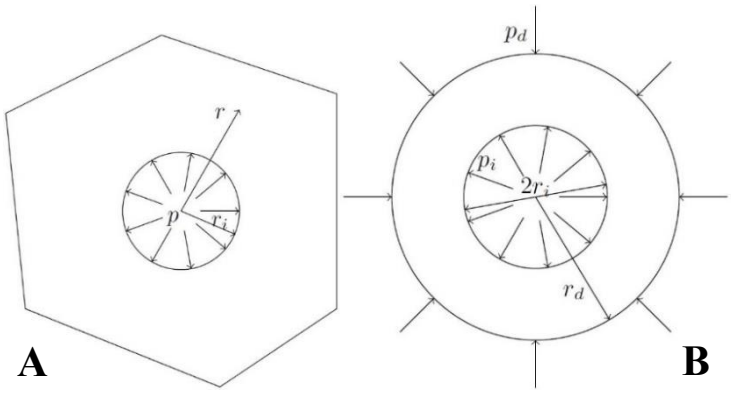
### 3.1.1. Sonsuz delikli plakada girinti problemi

Merkezinde $r = r_i$ yarıçaplı delik bulunan ve delik kenarı $p$ basıncına maruz sonsuz plakada oluşan gerilmeler kutupsal koordinatlarda

$$\sigma_r = \frac{1}{\left(\frac{r_d}{r_i}\right)^2 - 1}\left[\left[1 - \frac{(r_d/r_i)^2}{(r/r_i)^2}\right]p - \left[1 - \frac{1}{(r/r_i)^2}\right]\left(\frac{r_d}{r_i}\right)^2 p_d\right] \tag{3.1a}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\left(\frac{r_d}{r_i}\right)^2 - 1}\left[\left[1 + \frac{(r_d/r_i)^2}{(r/r_i)^2}\right]p - \left[1 + \frac{1}{(r/r_i)^2}\right]\left(\frac{r_d}{r_i}\right)^2 p_d\right] \tag{3.1b}$$

ile verilir (Venkatraman & Patel, 1970).




**Şekil 3.1 A)** Delik kenarı basınca maruz sonsuz plaka **B)** İç ve dış basınca maruz silindir (Pala & Güllü, 2002)

Bu sonuçlarla yola çıkıp $r_d \to \infty$ ve $p_d \to 0$ alarak sonsuz plakadaki gerilme ve yer değiştirmeleri aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$\sigma_r = -p(r_i/r)^2 \tag{3.2}$$

$$\sigma_\theta = p(r_i/r)^2 \tag{3.3}$$

$$u = \frac{p(1+\nu)}{Er} r_i^2 = \frac{pr(1+\nu)}{E}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \tag{3.4}$$

Denklem 3.2, 3.3 ve 3.4 de $r = r_i$ yazarak delik kenarındaki yer değiştirme ve gerilmeler için:

$$\sigma_\theta = p \quad , \quad \sigma_r = -p$$
$$u = \frac{p(1+\nu)r_i}{E}$$

elde ederiz. Hooke bağıntılarını kullanarak şekil değiştirme oranları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) = -\frac{p}{E}(1+\nu)$$

Buradan radyal şekil değiştirme miktarına geçiş yaparak

$$|\Delta r_i| = |\varepsilon_r r_i| = \frac{pr_i}{E}(1+\nu)$$

buluruz. Silindir çakıldıktan sonra delik kenarındaki gerilme ve yer değiştirme ifadelerini aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$\sigma_\theta = -p \quad , \quad \sigma_r = -p$$
$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) = -\frac{p}{E}(1-\nu)$$
$$|\Delta d| = |\varepsilon_r d| = \frac{pd}{E}(1-\nu)$$

Çakılan silindir çapının delik çapından büyük olduğunu $(d > r_i)$ kabul edip, girinti miktarını $\delta$ ile ifade edelim. Girinti miktarını toplam yer değiştirme miktarına eşitleyerek

$$\delta = |\Delta d| + |\Delta r_i| \tag{3.5}$$

elde ederiz. 3.2 ve 3.5 denklemlerini kullanarak delik kenarındaki basınç ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p = \frac{E\delta}{(1+\nu)r_i + (1-\nu)d} \tag{3.6}$$

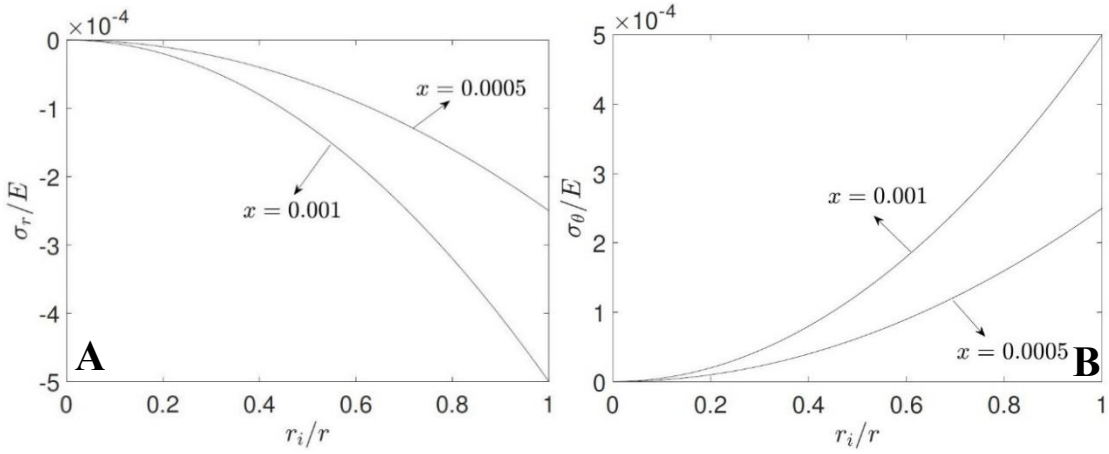
şeklindedir. 3.6 ifadesini denklem 3.2 ve 3.3 de yerine yazarak plakadaki düzlemsel gerilmeler

$$\frac{\sigma_r}{E} = -\frac{x}{(1+\nu)+(1-\nu)(x+1)}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2$$

$$\frac{\sigma_\theta}{E} = \frac{x}{(1+\nu)+(1-\nu)(x+1)}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2$$

$$x = \delta/r_i$$

şeklinde elde edilebilir. Buradan $\frac{\sigma_r}{E}$ ve $\frac{\sigma_\theta}{E}$ 'nin $\frac{r_i}{r}$ oranına bağlı olarak değişim grafikleri elde edilebilir (Pala & Güllü, 2002).




**Şekil 3.2 A)** $\sigma_r/E$ nin $r_i/r$ ile değişimi $(x = \delta/r_i)$ **B)** $\sigma_\theta/E$ nin $r_i/r$ ile değişimi (Pala & Güllü, 2002)

### 3.1.2. Eksenel çekmeye maruz plakada girinti problemi

Ortasında delik bulunan eksenel yüklemeye maruz sonsuz plaka için literatürde analitik çözüm yöntemi mevcuttur. Delik kenarı $-p$ sabit basıncına maruz eksenel çekilen plakadaki gerilme dağılımını bulmak istiyoruz. Çözüm için klasik teoride kullanılan aşağıdaki gerilme fonksiyonu kullanılacaktır:

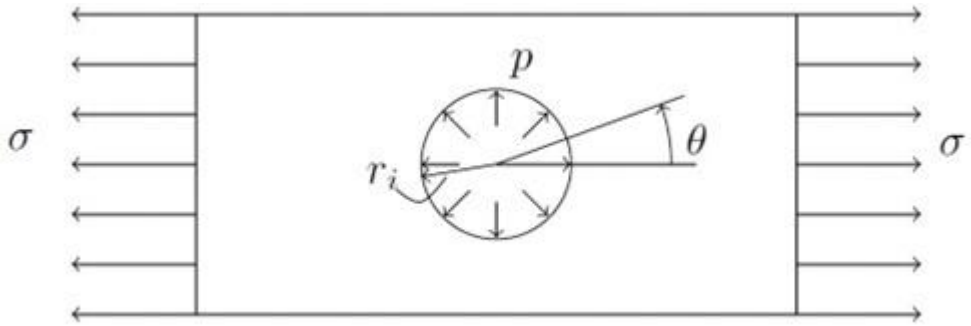
$$\varphi = g(r) + f(r)\cos(2\theta) \tag{3.7}$$

3.7 gerilme fonksiyonu ifadesi kullanılarak 2.21, 2.22 ve 2.23 denklemlerinden plakadaki gerilmelerin 3.8 denklemlerinde verilen şekilde olduğu gösterilebilir (Pala & Güllü, 2002).

$$\sigma_r = c_1(1 + 2\ln r) + 2c_2 + \frac{c_3}{r^2} - \left(2c_6 + \frac{4c_7}{r^2} + \frac{6c_8}{r^4}\right)\cos(2\theta) \tag{3.8a}$$

$$\sigma_\theta = c_1(3 + 2\ln r) + 2c_2 - \frac{c_3}{r^2} + \left(2c_6 + 12c_5 r^2 + \frac{6c_8}{r^4}\right)\cos(2\theta) \tag{3.8b}$$

$$\tau_{r\theta} = \left(2c_6 + 6c_5 r^2 - \frac{2c_7}{r^2} - \frac{6c_8}{r^4}\right)\sin(2\theta) \tag{3.8c}$$




**Şekil 3.3** $\sigma$ gerilmesi ile yüklenmiş delikli plaka

Bilinmeyen katsayıları belirlemek için yarıçapı sonsuza götürdüğümüzde gerilmeler sonsuz değer alamayacağından, $r \to \infty$ için $c_1 = c_5 = 0$ olarak elde edilir. Sınırdaki ve sonsuzdaki sınır şartlarının

$$\begin{aligned}
\sigma_r(\infty, \theta) &= \frac{\sigma}{2}(1 + \cos(2\theta)) \\
\tau_{r\theta}(\infty, \theta) &= -\frac{\sigma}{2}\sin(2\theta) \\
\sigma_\theta(\infty, \theta) &= \frac{\sigma}{2}(1 - \cos(2\theta)) \\
\sigma_r(r_i, \theta) &= -p \\
\tau_{r\theta}(r_i, \theta) &= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklinde olduğu bilinmektedir (Pala & Güllü, 2002).
Bu şartlar 3.8 denklemlerinde kullanılarak katsayılar

$$c_2 = \sigma/4, \qquad c_6 = -\sigma/4, \qquad c_7 = \frac{\sigma}{2} r_i^2, \qquad c_8 = -\frac{\sigma}{4} r_i^4, \qquad c_3 = -(p + \sigma/2) r_i^2$$

şeklinde bulunur.

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left[\left[1 - \left(1 + \frac{2p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] + \left[1 - 4\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4\right]\cos(2\theta)\right] \tag{3.10a}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left[\left[1 + \left(1 + \frac{2p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] - \left[1 + 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4\right]\cos(2\theta)\right] \tag{3.10b}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2}\left[\left[1 + 2\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4\right]\sin(2\theta)\right] \tag{3.10c}$$

3.10 denklemlerinde $p$ basıncı hala bilinmemektedir. $p$ yi bulabilmek için radyal doğrultudaki şekil değiştirme oranını yazalım:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r = \frac{\sigma}{2E}\Bigg[&\left[\left(1 - q\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right) + \left(1 - 4\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4\right)\cos(2\theta)\right] \\ &- \nu\left[\left(1 + q\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right) - \left(1 + 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4\right)\cos(2\theta)\right]\Bigg]\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.11 denklemi integre edilerek

$$u = \frac{r\sigma}{2E}[a_5 + a_6\cos(2\theta)] + f(\theta) \tag{3.12}$$

bulunur. $\theta$ ya bağlı bilinmeyen fonksiyonu bulmak ve işlem kolaylığı sağlamak için aşağıdaki kısaltmaları yapalım:

$$a_5 = \left(1 + q\overline{r}^2\right) - \nu\left(1 - q\overline{r}^2\right)$$

$$a_6 = \left(1 + 4\overline{r}^2 - \overline{r}^4\right) + \nu\left(1 - \overline{r}^4\right)$$

$$q = 1 + \frac{2p}{\sigma}\ , \qquad \overline{r} = \frac{r_i}{r}$$

Benzer şekilde $\theta$ yönündeki şekil değiştirme oranını aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu\sigma_r] = \frac{\sigma}{2E}[(a_3 - \nu a_1) - (a_4 + \nu a_2)\cos(2\theta)] \tag{3.13}$$

Benzer şekilde aşağıdaki kısaltmaları yapalım:

$$a_1 = 1 - q\overline{r}^2, a_2 = 1 - 4\overline{r}^2 + 3\overline{r}^4, a_3 = 1 + q\overline{r}^2, a_4 = 1 + 3\overline{r}^4$$

$v$ yönündeki yer değiştirmeyi elde etmek için 2.30 denklemini aşağıdaki gibi yazalım:

$$r\varepsilon_\theta - u = \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Bu denklemi integre ederek $v$ yönündeki yer değiştirme için

$$v = \frac{r\sigma}{2E}[-a_8 \sin(2\theta)] - \int f(\theta)d\theta + g(r) \tag{3.14}$$

elde edilir. Bilinmeyen $f(\theta)\, ve\, g(r)$ fonksiyonlarını bulabilmek için kayma şekil değiştirme oranını yazalım:

$$\gamma_{r\theta} = -\frac{\sigma}{E}(1+\nu)\left[1 + 2\overline{r}^2 - 3\overline{r}^4\right]\sin(2\theta) \tag{3.15}$$

2.31 denklemi

$$\gamma_{r\theta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)$$

şeklinde idi. 3.15 denklemi ve 2.31 denkleminde verilen kayma şekil değiştirme oranı ifadesini birlikte yazarak

$$g - rg' = \frac{df}{d\theta} + \int f(\theta)d\theta = c \tag{3.16}$$

elde edilir. 3.16 denklemine bakılırsa, bu ifade ancak bir sabite eşit olursa tüm $\theta$ değerleri için sağlanabilir. 3.16 'nın çözümü

$$g(r) = c + k_2 r\,,\; f = A\sin(\theta) + B\cos(\theta) \tag{3.17}$$

$$u = \frac{r\sigma}{2E}[a_5 + a_6\cos(2\theta)] + A\sin(\theta) + B\cos(\theta) \tag{3.18}$$

$$v = \frac{r\sigma}{2E}[-a_8\sin(2\theta)] + A\cos(\theta) - B\sin(\theta) + k_2 r \tag{3.19}$$

şeklindedir. Dikey ve yatay simetriden

$$A = B = k_2 \ = \ 0$$

bulunur. Delik kenarındaki yer değiştirmeleri elde etmek için $r = r_i$ alınırsa

$$u|_{r=r_i} = \frac{r_i}{E}[\sigma + (1+\nu)p + 2\sigma\cos(2\theta)] \tag{3.20}$$

$$v|_{r=r_i} = -\frac{2\sigma r_i \sin(2\theta)}{E} \tag{3.21}$$

elde edilir. Aşağıdaki kısaltmaları yapalım:

$$u|_{r_i} = m_1(m_2 + m_3\cos(2\theta)) \tag{3.22}$$

$$m_1 = \frac{r_i}{E} \quad , \quad m_2 = \sigma + (1+\nu)p \quad , \quad m_3 = 2\sigma$$

3.22 denklemi incelendiğinde $m_1 m_3$ ifadesi yeterince küçük olduğundan, denklemde ihmal edilerek

$$\delta' = |\Delta r_i| + |\Delta d| = |m_1 m_2| + \left|\frac{pd}{E}(1-\nu)\right| \tag{3.23}$$

bulunur. Silindir çakıldıktan sonra delik kenarındaki basınç için

$$\frac{p}{E} = \frac{\frac{\delta'}{r_i} - \frac{\sigma}{E}}{2 + \frac{\delta'}{r_i}(1-\nu)} \tag{3.24}$$

bulunur. $p$ nin pozitif olması gerektiğinden, yukarıdaki 3.24 denkleminde $p$ nin pozitif olabilmesi için $\delta'/r_i > \sigma/E$ olmalıdır. Bu şart aynı zamanda girinti alt limitini ifade eder. Benzer şekilde uygulanan girinti miktarına bağlı olarak üst limit akma sınırıdır. Yükleme durumuna bakıldığında maksimum gerilmelerin delik kenarında ve $\theta = \pi/2$ , $\theta = 3\pi/2$ noktalarında olduğu görülür.

Von-Mises akma kriteri vasıtasıyla akmaya yol açacak iç basınç değerini aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta + 3\tau_{r\theta}^2} < \sigma_{akma} \tag{3.25}$$

Gerilme bileşenlerinin maksimum olduğu değerleri belirlemek için 3.10 denklemlerine müracaat ederek

$$\sigma_r = -p \quad , \quad \sigma_\theta = 3\sigma + p \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0$$

elde edilir. Bu değerleri 3.25 denkleminde yerine yazıp, ara işlemler yapıldıktan sonra $p$ basınç değeri

$$p_{max} = \frac{\sqrt{12\sigma_{akma}^2 - 27\sigma^2} - 9\sigma}{6} \tag{3.26}$$

olarak elde edilir. 3.26 denklemi akma sınırı altında delik kenarına uygulanabilecek maksimum basıncı ifade etmektedir. 3.26 ifadesi 3.24 denkleminde yazılarak üst girinti sınırı

$$\frac{\delta'}{r_i} < \frac{2p_{max} + \sigma}{E - (1-\nu)p_{max}} \tag{3.27}$$

olarak elde edilir. Alt ve üst sınır değerleri dikkate alınarak

$$\frac{\sigma}{E} < \frac{\delta'}{r_i} < \frac{2p_{max} + \sigma}{E - (1-\nu)p_{max}}$$

bulunur.

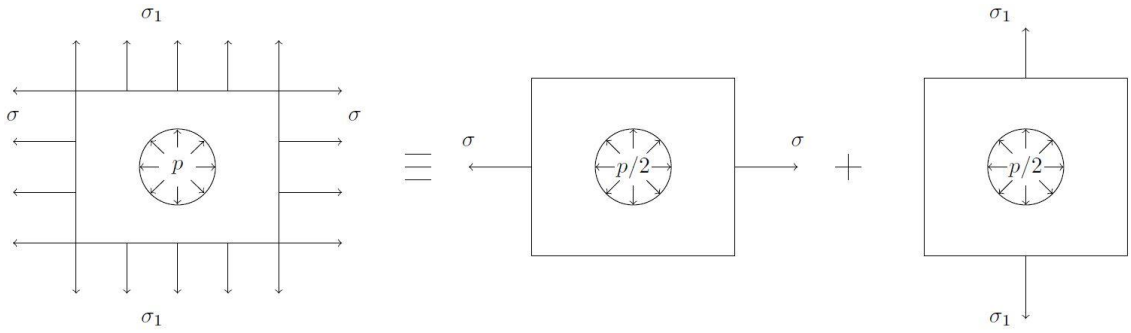
### 3.2. İki Yönlü Eksenel Çekmeye Maruz Delikli Plakada Girinti Problemi

Eksenel çekmeye maruz plakada elde edilen çözüm süperpoze edilerek iki yönlü eksenel çekmeye maruz plaka için de kullanılabilir. Burada $\sigma = \sigma_1$ ve $\theta = \theta + \pi/2$ alarak dikey yönlü çekmenin etkisini ifade edebiliriz. Eksenel yönlü çekme hali için çözüm daha önce

bulunmuştu. Bu çözümü süperpoze edip, iki yönlü eksenel çekmeye maruz plaka için olan çözüm elde edilebilir (Pala & Güllü, 2002).

3.10 denklemlerine müracaat edip, $p \to p/2$ alarak 3.28 denklemlerini yazabiliriz:

$$\sigma_r = \sigma_{r_1} + \sigma_{r_2} = \sigma\left[1 - \left(1 + \frac{p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] \tag{3.28a}$$




**Şekil 3.4** İki yönlü eksenel çekmeye maruz delikli plaka

$$\sigma_\theta = \sigma_{\theta_1} + \sigma_{\theta_2} = \sigma\left[1 + \left(1 + \frac{p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] \tag{3.28b}$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \tag{3.28c}$$

Yükleme şekline bakıldığında $\sigma_r$ ve $\sigma_\theta$; $\theta$ açısından bağımsızdır. Böylece yer değiştirmeler sadece $r$ ye bağlı olacaktır:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta)$$

$$u = \frac{r\sigma}{E}\left[\left[1 + \left(1 + \frac{p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] - \nu\left[1 - \left(1 + \frac{p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\right] + c_2 \tag{3.29}$$

Denklem 3.29da $c_2$ bir sabittir ve $u = (\sigma/E)(1-\nu)r$ için $r \to \infty$ alındığında $c_2 = 0$ bulunur. Şimdi, denklem 3.20 ve 3.24 kullanılarak $r = r_i$ için

$$u|_{r_i} = \frac{r_i}{E}[2\sigma + p(1+\nu)] \tag{3.30}$$

elde edilir. Girinti miktarını $\delta''$ ile ifade ederek

$$p = \frac{\delta'' E - 2r_i \sigma}{2r_i + \delta''(1-\nu)} \tag{3.31}$$

yazabiliriz. Denklemin boyutsuz değişkenler cinsinden formu aşağıdadır:

$$\frac{p}{E} = \frac{\frac{\delta''}{r_i} - 2\frac{\sigma}{E}}{2 + \frac{\delta''}{r_i}(1-\nu)}$$

$p$ nin pozitif olabilmesi için $(\delta''/r_i) > 2\sigma/E$ olmalıdır. Bu aynı zamanda girinti miktarı için alt limiti belirler. Üst limiti bulmak için bir önceki bölümde verildiği gibi Von-Mises gerilmesini elde ederek delik kenarına uygulanabilecek maksimum basınç

$$\frac{\delta''}{r_i} < \frac{2(p_{max} + \sigma)}{E - (1-\nu)p_{max}} \tag{3.32}$$

şeklinde bulunur. Delik kenarındaki maksimum gerilme akma gerilmesi altında olması gerektiğinden, $\sigma$ nın alabileceği maksimum değer $\sigma_{akma}^2 > 4\sigma^2$ ile sınırlanır. Bu çerçevede maksimum basınç ifadesi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$p_{max} = \frac{\sqrt{12\sigma_{akma}^2 - 12\sigma^2} - 6\sigma}{6} \tag{3.33}$$

### 3.3. Kaymaya Maruz Delikli Plakada Girinti Problemi

Delik kenarı $-p_0$ basıncına maruz $\tau_0$ kayma gerilmesi altındaki plakada gerilme dağılımını bulmak istiyoruz. Çözüm için klasik teoride kullanılan aşağıdaki gerilme fonksiyonu

$$\varphi = g(r) + f(r)\sin(2\theta) \tag{3.34a}$$

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C\frac{1}{r^2} + D$$

$$g(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$$

$$\varphi = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 + (Ar^2 + Br^4 + C\frac{1}{r^2} + D)\sin(2\theta) \tag{3.34b}$$

şeklindedir (Barber, 2010).

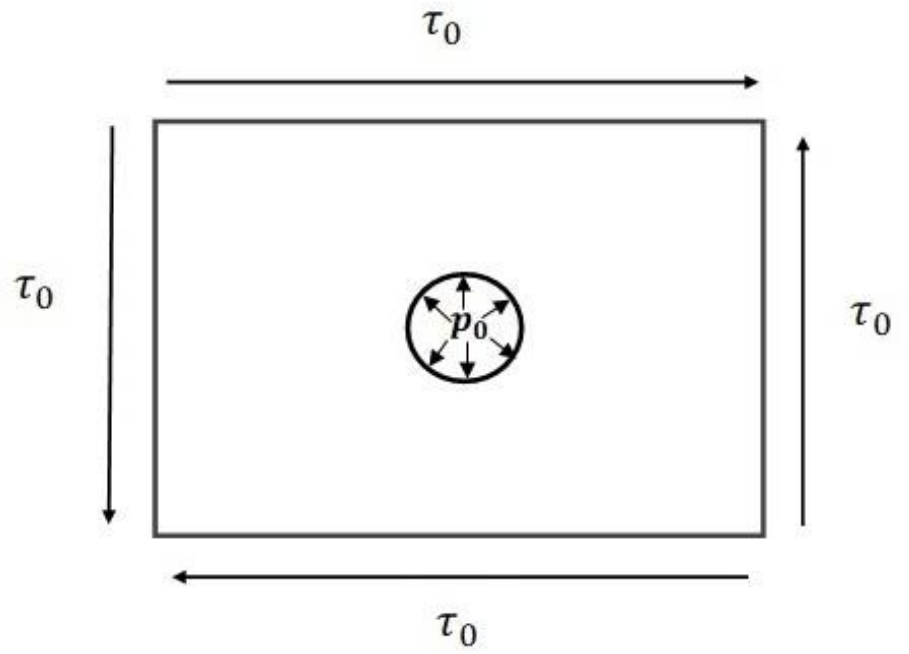
2.21, 2.22 ve 2.23 denklemlerinde verilen ifadeler

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)$$

şeklinde idi.




**Şekil 3.5** $\tau_0$ gerilmesi ile yüklenmiş delikli plaka

Sonsuz bir plaka için sınır şartları

$$\begin{gathered} r = \infty \text{ için ;} \\ \sigma_r = \tau_0 \sin(2\theta) \\ \sigma_\theta = -\tau_0 \sin(2\theta) \\ \tau_{r\theta} = \tau_0 \cos(2\theta) \\ r = r_i \text{ için;} \end{gathered} \tag{3.35a}$$

$$\sigma_r = -p_0 \ , \ \tau_{r\theta} = 0 \tag{3.35b}$$

şeklindedir (Barber, 2010).

3.34b denklemini alıp 2.21, 2.22 ve 2.23 denklemlerine müracaat ederek

$$\sigma_r = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right)\sin(2\theta) + C_1(1 + 2lnr) + 2C_2 + \frac{C_3}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right)\sin(2\theta) + C_1(3 + 2lnr) + 2C_2 - \frac{C_3}{r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \left(-2A - 6Br^2 + \frac{6C}{r^4} + \frac{2D}{r^2}\right)\cos(2\theta)$$

elde ederiz. 3.35 ile verilen sınır şartları kullanılarak

$$\mathrm{B} = 0, \qquad C_1 = 0, \qquad C_2 = 0$$

$$A = -\frac{\tau_0}{2}, \quad C_3 = -p_0 r_i^2, \quad D = \tau_0 r_i^2, \quad C = -\frac{\tau_0 r_i^4}{2}$$

bulunur. Buna göre gerilme ifadeleri

$$\sigma_r = -\left(2A + \tfrac{6C}{r^4} + \tfrac{4D}{r^2}\right)\sin(2\theta) + 2C_2 + \tfrac{C_3}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right)\sin(2\theta) + 2C_2 - \frac{C_3}{r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \left(-2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{2D}{r^2}\right)\cos(2\theta)$$

formunu alırlar. Bulunan katsayıları yukarıdaki denklemlerde yerine yazılarak

$$\sigma_r = \left(\tau_0 + \frac{3\tau_0 r_i^4}{r^4} - \frac{4\tau_0 r_i^2}{r^2}\right)\sin(2\theta) - \frac{p_0 r_i^2}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = \left(-\tau_0 - \frac{3\tau_0 r_i^4}{r^4}\right)\sin(2\theta) + \frac{p_0 r_i^2}{r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \left(\tau_0 - \frac{3\tau_0 r_i^4}{r^4} + \frac{2\tau_0 r_i^2}{r^2}\right)\cos(2\theta)$$

elde ederiz. Düzenleme yapılarak gerilme dağılımı

$$\sigma_r = \tau_0 \left[ \left( 1 + 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4 - 4\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right) \sin(2\theta) - \frac{p_0}{\tau_0}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right] \quad (3.36a)$$

$$\sigma_\theta = \tau_0 \left[ \left( -1 - 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4 \right) \sin(2\theta) + \frac{p_0}{\tau_0}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right] \quad (3.36b)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_0 \left[ 1 - 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4 + 2\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right] \cos(2\theta) \quad (3.36c)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen 3.36 denklemleri Şekil 3.5 de verilen plakadaki gerilme dağılımını vermektedir. Aşağıdaki kısaltmaları yapalım:

$$\frac{p_0}{\tau_0} = q \text{ ve } R = \frac{r_i}{r}$$

Buna göre gerilmeler

$$\sigma_r = \tau_0[(1 + 3R^4 - 4R^2)\sin(2\theta) - qR^2]$$

$$\sigma_\theta = \tau_0[(-1 - 3R^4)\sin(2\theta) + qR^2]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_0[1 - 3R^4 + 2R^2]\cos(2\theta)$$

şeklini alır. Şimdi $p$ yi bulabilmek için radyal doğrultudaki şekil değiştirme oranını yazalım:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\tau_0}{E}\left[(1 + 3R^4 - 4R^2)\sin(2\theta) - qR^2 - \nu[(-1 - 3R^4)\sin(2\theta) + qR^2]\right] \quad (3.37a)$$

Düzenleme yapılarak

$$\varepsilon_r = \frac{\tau_0}{E}\left[\sin(2\theta)\left((1+\nu)(1+3R^4) - 4R^2\right) - qR^2(1+\nu)\right] \quad (3.37b)$$

elde edilir. Aşağıdaki kısaltmaları yapalım:

$$a_1 = (1+\nu)(1+3R^4)$$

$$a_2 = qR^2(1+\nu)$$

$$a_5 = 4R^2$$

Buna göre radyal gerinme

$$\varepsilon_r = \frac{\tau_0}{E}[\sin(2\theta)(a_1 - a_5) - a_2] \tag{3.37c}$$

şeklini alır. Buradan radyal yöndeki yer değiştirmeyi elde etmek için integrasyonla

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \ , \quad \int \partial u_r = \int \varepsilon_r \partial r \quad \rightarrow \quad u_r = \int \varepsilon_r dr + f(\theta)$$

ya da

$$u_r = \frac{\tau_0 r}{E}[\sin(2\theta)(a_1 - a_5) - a_2] + f(\theta) \tag{3.38}$$

elde ederiz. Teğetsel doğrultudaki şekil değiştirme oranı

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\tau_0}{E}\left[(-1 - 3R^4)\sin(2\theta) + qR^2 - \nu[(1 + 3R^4 - 4R^2)\sin(2\theta) - qR^2]\right] \tag{3.39a}$$

ya da

$$\varepsilon_\theta = \frac{\tau_0}{E}\left[-\sin(2\theta)\left(1 + 3R^4(1+\nu) + \nu(1 - 4R^2)\right) + qR^2(1+\nu)\right] \tag{3.39b}$$

şeklinde elde ederiz. Aşağıdaki kısaltmaları yapalım:

$$a_3 = 1 + (1 + \ \nu)3R^4$$

$$a_4 = \nu(1 - 4R^2)$$

$$a_4 = \nu(1 - a_5)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\tau_0}{E}[a_2 - \sin(2\theta)(a_3 + a_4)] \tag{3.39c}$$

Teğetsel doğrultudaki yer değiştirme için integrasyonla

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\varepsilon_\theta - u_r \quad , \quad \int \partial v = \int \left(r\varepsilon_\theta - u_r - f(\theta)\right) \partial\theta$$

$$v_\theta = \int \left[\frac{\tau_0 r}{E}[a_2 - \sin(2\theta)(a_3 + a_4)] - \frac{\tau_0 r}{E}[\sin(2\theta)(a_1 - a_5) - a_2]\right] \partial\theta - \int f(\theta)\partial\theta$$

elde ederiz. Yukarıdaki ifadedeki integral değerlendirilerek

$$v_\theta = \frac{\tau_0 r}{E}\left[a_2\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2}(a_3 + a_4)\right] + \frac{\tau_0 r}{E}\left[\frac{\cos(2\theta)}{2}(a_1 - a_5) + a_2\theta\right] - \int f(\theta)\partial\theta + g(r) \tag{3.40}$$

elde edilir. $\theta$ ve $r$' ye bağlı bilinmeyen $f(\theta)$ ve $g(r)$ fonksiyonlarını bulmak için kayma şekil değiştirme oranlarını yazalım:

$$\tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} \quad \rightarrow \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta} \tag{3.41a}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tag{3.41b}$$

Şimdi 3.41b denklemini 3.41a denkleminde yerine yazarak

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{r\theta} \tag{3.42}$$

elde ederiz. Buradan 2.31 denklemi

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

şeklinde idi. Şimdi 2.31deki terimleri ayrı ayrı yazalım:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\tau_0}{E}[2\cos(2\theta)\,(a_1 - a_5)] + \frac{1}{r}f'(\theta) \tag{3.43a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\tau_0}{E}\left[a_2\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2}(a_3 + a_4)\right] + \frac{\tau_0}{E}\left[\frac{\cos(2\theta)}{2}(a_1 - a_5) + a_2\theta\right] + g'(r) \tag{3.43b}$$

$$\begin{aligned}\frac{v}{r} = {} & \frac{\tau_0}{E}\left[a_2\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2}(a_3 + a_4)\right] + \frac{\tau_0}{E}\left[\frac{\cos(2\theta)}{2}(a_1 - a_5) + a_2\theta\right] \\ & - \frac{1}{r}\int f(\theta)\partial\theta + \frac{1}{r}g(r)\end{aligned} \tag{3.43c}$$

Şimdi 3.42 ve 3.43 denklemlerini birbirine eşitleyerek

$$\begin{aligned}&\frac{\tau_0}{E}[2 + 2\nu - 6R^4 - 6R^4\nu + 4R^2 + 4R^2\nu]\cos(2\theta) \\ &= \frac{\tau_0}{E}[\cos(2\theta)\,(2 + 6R^4 + 2\nu + 6R^4\nu - 8R^2)] + \frac{1}{r}f'(\theta) \\ &+ g'(r) + \frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta - \frac{1}{r}g(r)\end{aligned}$$

buluruz. Denklem düzenlenerek

$$\begin{aligned}&\frac{\tau_0}{E}[-12R^4 - 12R^4\nu + 12R^2 + 4R^2\nu]\cos(2\theta) \\ &= \frac{1}{r}f'(\theta) + g'(r) + \frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta - \frac{1}{r}g(r)\end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. 3.44 denkleminin sol tarafının köklerine bakılırsa, sağ tarafın çözümünün elde edilebilmesi için $R = 0$ olması gerekir. Buradan

$$0 = \frac{1}{r}f'_{(\theta)} + g'_{(r)} + \frac{1}{r}f_{(\theta)}d\theta - \frac{1}{r}g_{(r)} \tag{3.45a}$$

$$g_{(r)} - rg'_{(r)} = f'_{(\theta)} + f_{(\theta)} \tag{3.45b}$$

elde edilir. 3.45 denklemlerine bakıldığında bu ifadeler ancak bir sabite eşit olduğunda sağlanabilir:

$$g_{(r)} - rg'_{(r)} = C \quad , \quad g_{(r)} = c + kr$$

$$f'_{(\theta)} + f_{(\theta)} = C \quad , \quad f_{(\theta)} = A\sin(\theta) + B\cos(\theta)$$

$g(r)$ ve $f(\theta)$ fonksiyonlarının çözümleri literatürde mevcuttur (Timoshenko & Goodier, 1951).
Dikey ve yataydaki simetriden

$$A = B = k = 0 \quad , \quad g_{(r)} = 0$$

elde edilir. Buradan radyal ve teğetsel doğrultulardaki yer değiştirmeler

$$u_r = \frac{\tau_0 r}{E}[\sin(2\theta)\,(a_1 - a_5) - a_2] + f_{(\theta)} \quad , \quad f_{(\theta)} = 0$$

$$v_\theta = \frac{\tau_0 r}{E}\left[a_2\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2}(a_3 + a_4)\right] + \frac{\tau_0 r}{E}\left[\frac{\cos(2\theta)}{2}(a_1 - a_5) + a_2\theta\right] - f_{(\theta)} + g_{(r)}$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki denklemleri düzenleyerek

$$u_r = \frac{\tau_0 r}{E}\left[\sin(2\theta)\left((1+\nu)(1+3R^4) - 4R^2\right) - qR^2(1+\nu)\right]$$

$$u_r = \frac{\tau_0 r}{E}\left[\sin(2\theta)\left((1+\nu)\left(1+3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4\right) - 4\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right) - \frac{p_0}{\tau_0}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2(1+\nu)\right]$$

$$v_\theta = \frac{\tau_0 r}{E}\left[\frac{p_0}{\tau_0}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2(1+\nu)\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2}\left(1 + 3(1+\nu)\left(\frac{r_i}{r}\right)^4 + \nu\left(1 - 4\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right)\right)\right] + \frac{\tau_0 r}{E}\left[\frac{\cos(2\theta)}{2}\left((1+\nu)\left(1+3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4 - 4\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right)\right) + \frac{p_0}{\tau_0}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2(1+\nu)\theta\right]$$

elde ederiz. Şimdi $r = r_i$ alarak

$$u_r = \frac{\tau_0 r_i}{E}\left[\sin(2\theta)4\nu - \frac{p_0}{\tau_0}(1+\nu)\right] \tag{3.46a}$$

$$v_\theta = \frac{2\tau_0 r_i}{E}(1+\nu)\left[\frac{p_0}{\tau_0}\theta + \cos(2\theta)\right] \tag{3.46b}$$

radyal ve teğetsel doğrultulardaki yer değiştirmeleri elde ederiz. Şimdi çakılan silindirdeki yer değiştirmeleri elde etmek için

$$\sigma_r = \frac{1}{\left(\frac{r_d}{r_i}\right)^2 - 1}\left[\left[1 - \frac{(r_d/r_i)^2}{(r/r_i)^2}\right]p - \left[1 - \frac{1}{(r/r_i)^2}\right]\left(\frac{r_d}{r_i}\right)^2 p_d\right]$$

formundaki denklem 3.1'i kullanarak $r = r_i$ için

$$\sigma_r = -p(r_i/r)^2$$

$$\sigma_\theta = p(r_i/r)^2$$

elde ederiz. Denklem 3.3'e müracaat ederek

$$u = \frac{p(1+\nu)}{Er} r_i^2 = \frac{pr(1+\nu)}{E}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2$$

$$u = \frac{p(1+\nu)r_i}{E}$$

elde ederiz. Şimdi $\sigma_\theta = p$ , $\sigma_r = -p$ şartları kullanılarak

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) = -\frac{p}{E}(1+\nu)$$

delik kenarında $r = d$ için

$$|\Delta d| = |\varepsilon_r d| = \frac{pd}{E}(1+\nu)$$

bulunur. Silindir deliğe çakıldığı durumda $\sigma_\theta = -p$ , $\sigma_r = -p$ şartlarını kullanarak

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) = -\frac{p}{E}(1-\nu)$$

$$|\Delta d| = |\varepsilon_r d| = \frac{pd}{E}(1-\nu) \qquad (3.47)$$

silindirdeki yer değiştirme miktarını elde ederiz. Toplam yer değiştirme miktarının girinti miktarına eşit olacağını düşünerek

$$\delta = |\Delta d| + |\Delta r_i|$$

yazabiliriz. Buradan

$$|\Delta r_i| = |\Delta u_r|$$

$$|\Delta u_r| = \left|\frac{4\tau_0 r_i \nu}{E}\sin(2\theta) - \frac{p_0 r_i}{E}(1+\nu)\right| \tag{3.48}$$

bulunur. Toplam girinti miktarı

$$\delta = \left|\frac{4\tau_0 r_i \nu}{E}\sin(2\theta) - \frac{p_0 r_i}{E}(1+\nu)\right| + \left|\frac{p_0 r_i}{E}(1-\nu)\right| \tag{3.49}$$

elde edilir. Bulunan 3.49 denklemi incelenirse, $\left|\frac{p_0 r_i}{E}(1-\nu)\right|$ ifadesinde basınç ve uzunluk negatif olamayacağından, mutlak değer dışına olduğu gibi çıkarılabilir. Soldaki mutlak değerli ifadede ise hem pozitif hem de negatif olma durumuna bakılırsa

$$\left|\frac{4\tau_0 r_i \nu}{E}\sin(2\theta) - \frac{p_0 r_i}{E}(1+\nu)\right| > 0$$

$$\frac{4\tau_0 r_i \nu}{E}\sin(2\theta) > \frac{p_0 r_i}{E}(1+\nu)$$

$$\delta = \frac{r_i}{E}[\tau_0 \sin(2\theta) 4\nu - p_0 2\nu] \tag{3.50a}$$

$$p_0 = 2\tau_0 \sin(2\theta) - \frac{\delta E}{2\nu r_i} \tag{3.50b}$$

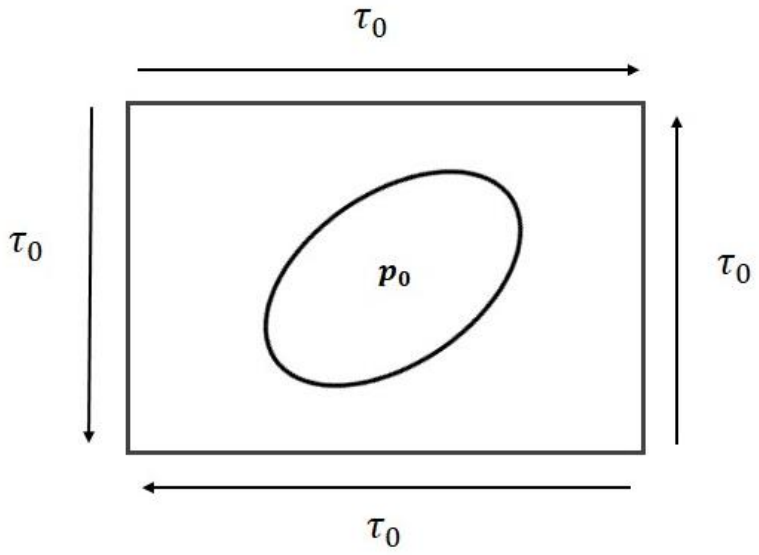
$$\left|\frac{4\tau_0 r_i \nu}{E}\sin(2\theta) - \frac{p_0 r_i}{E}(1+\nu)\right| < 0$$

$$\frac{4\tau_0 r_i \nu}{E}\sin(2\theta) < \frac{p_0 r_i}{E}(1+\nu)$$

$$\delta = \frac{r_i}{E}[-\tau_0 \sin(2\theta) 4\nu + 2p_0] \tag{3.51a}$$

$$p_0 = \frac{\delta E}{2r_i} + \tau_0 \sin(2\theta) 2\nu \tag{3.51b}$$

şeklinde elde edilir. 3.50 ve 3.51 denklemleri incelenirse, girinti miktarının artması ile delik kenarındaki basıncın artması gerektiği açıktır. Buradan 3.51b denklemini ele alıp muhakeme yapılırsa; $\theta$ açısı değişken ve $\theta$ nın alacağı değerlere göre $\sin(2\theta)$ ifadesi negatif değerler alabilecektir.




**Şekil 3.6** Yükleme şekli için delik çevresindeki deformasyonun görüntüsü

Şekil 3.6 da delik kenarındaki deformasyon incelendiğinde $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \frac{7\pi}{4}$ değerlerinde girinti miktarı daha fazla olacaktır ve basıncın artması gerekir. Bu bölgedeki $\theta$ değerlerinde $\sin(2\theta)$ ifadesinin pozitif değer alması gerekir. Diğer bir deyişle girintinin artacağı $\theta$ değerlerinde basınç artmalı, genişleme olan $\theta$ değerlerinde basınç azalmalıdır. Bunu sağlamak ve basıncın negatif değer alamayacağını göz önünde bulundurarak, $\sin(2\theta)$ ifadesinin $\theta$ açısına göre alması gereken işaret ters çevrilmelidir. Bunu sağlamak için denklem 3.51b aşağıdaki şekilde düzeltilerek

$$p_0 = \frac{\delta E}{2r_i} - |\tau_0 \sin(2\theta) 2\nu| \tag{3.52}$$

bulunur. Yükleme şekline bakıldığında plakada meydana gelecek minumum ve maksimum gerilmeler sırasıyla $\theta = \frac{5\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{4}$ ve $\theta = \frac{3\pi}{4}, \theta = \frac{7\pi}{4}$ değerlerinde olmalıdır. Alt ve üst girinti limitlerini belirlemek için 3.51b denklemini aşağıdaki gibi yazarak

$$\frac{\delta}{r_i} > \frac{2(p_0 - \tau_0 \sin(2\theta) 2\nu)}{E} \tag{3.53}$$

elde ederiz. 3.53 denklemi incelendiğinde girinti oluşabilmesi için $p_0 > \tau_0 \sin(2\theta) 2\nu$ olmalıdır. 3.53 denklemi elastik deformasyonun başlayacağı sınır olarak görülebilir. Üst girinti limitini düşünürsek, maksimum gerilme değerleri $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \frac{7\pi}{4}$ ve $r = r_i$ delik kenarında meydana gelecektir. 3.36 denklemlerinden maksimum gerilmeler

$$\sigma_r = -p_0, \qquad \sigma_\theta = 4\tau_0 + p_0, \qquad \tau_{r\theta} = 0 \tag{3.54}$$

şeklinde bulunur. Üst girinti limitini bulmak için Von-Mises gerilmesi

$$\sigma_{vm} < \sigma_{akma}$$
$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta + 3\tau_{r\theta}^2} < \sigma_{akma} \tag{3.55}$$

şeklinde yazılabilir. 3.54 ifadesinde bulunan sonuçlar 3.55 denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\sigma_{vm}^2 = p_0^2 + 16\tau_0^2 + 8\tau_0 p_0 + p_0^2 + 4\tau_0 p_0 + p_0^2 < \sigma_{akma}^2$$

$$\sigma_{vm}^2 = 3p_0^2 + 12\tau_0 p_0 + (4\tau_0)^2 < \sigma_{akma}^2$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{3.56}$$
$$\Delta = 144\tau_0^2 - 4.3(4\tau_0)^2$$
$$\Delta = -48\tau_0^2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \ , \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-12\tau_0 - \sqrt{48\tau_0^2}}{6}$$

bulunur. Buradan maksimum basınç

$$p_{max} = \frac{\sqrt{12\sigma_{akma}^2 - 48\tau_0^2} - 12\tau_0}{6} \tag{3.57}$$

olarak bulunur. 3.57 denklemi akma gerilmesi sınırında uygulanabilecek maksimum delik kenarındaki basıncı ifade etmektedir. 3.57 denklemindeki $p_{max}$ ifadesini 3.53 denkleminde $p_0$ yerine yazarak üst girinti limiti

$$\frac{\delta}{r_i} < \frac{2(p_{max} - \tau_0 \sin(2\theta) 2\nu)}{E} \tag{3.58}$$

şeklinde elde edilir. Alt ve üst limiti birlikte vermek gerekirse

$$\frac{2(p_0 - \tau_0 \sin(2\theta) 2\nu)}{E} < \frac{\delta}{r_i} < \frac{2(p_{max} - \tau_0 \sin(2\theta) 2\nu)}{E}$$

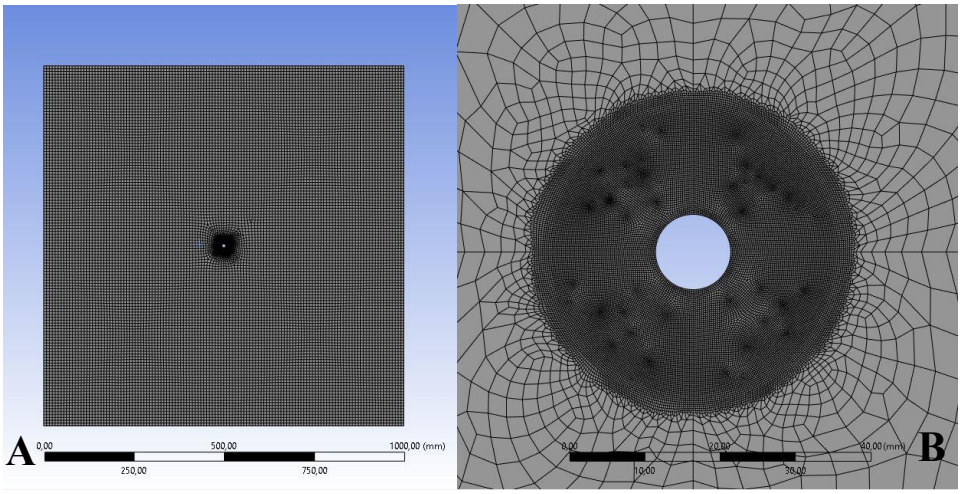
şeklindedir. Girinti miktarı alt ve üst aralıkta olmalıdır.

# 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

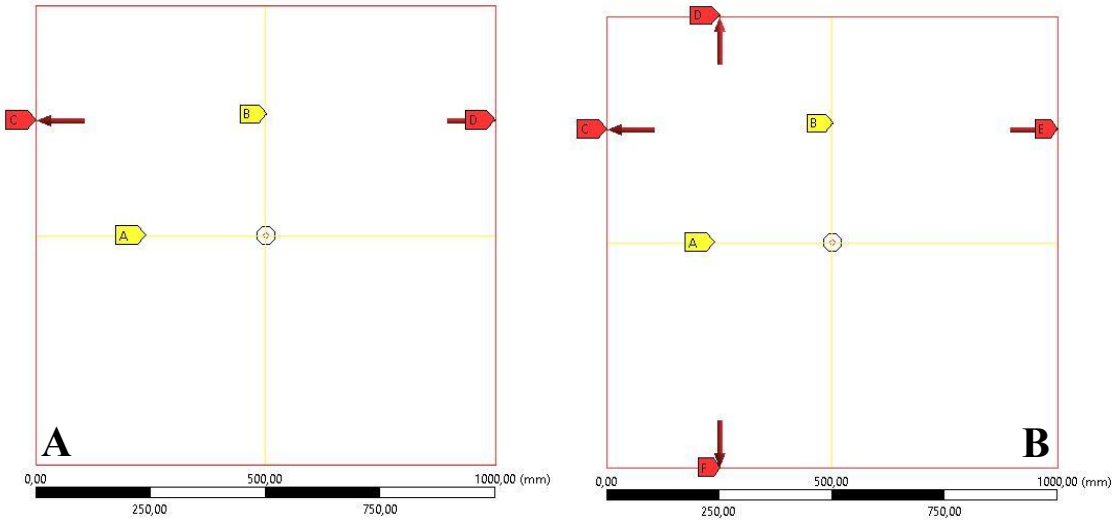
Çalışmada elde edilen denklemler Matlab programı kullanılarak çözdürülmüştür. Karşılaştırma için aynı problem Ansys programı ile sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözdürülmüştür. Analitik sonuçların karşılaştırılabilmesi için çözüm sonuçları görsel hale getirilmiştir. Aynı sonlu elemanlar programlarında olduğu gibi renk ölçeklendirmesi kullanılarak analitik sonuçlar gösterilmiştir. Analitik teori ve sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen gerilme dağılımları incelenmiş, aynı koordinatlar kullanılarak elde edilen gerilme değerleri Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3 ile verilmiştir. Rastgele alt ve üst limitler içinde verilen girinti miktarına karşılık Matlab ile hesaplanan delik basıncı, Ansys'de girilerek hesaplamalar yapılmıştır. Farklı $\sigma$ ve $\tau_0$ gerilme değerleri için çözümler tekrarlanmış ve elde edilen sonuçlar; şekiller ve tablolar halinde verilmiştir.
Şekil 4.1 ile Ansys'de kullanılan eksenel çekmeye maruz plaka modelinin mesh görüntüsü, Şekil 4.15 ile de kaymaya maruz plaka modelinin mesh görüntüsü verilmiştir. Delik çevresinde küçük mesh boyutları kullanılmıştır (refinement). Analitik hesaplamalarda ve Ansys modelinde kullanılan plakanın ölçüleri $x$ ve $y$ ekseninde 1000mm olarak alınmıştır. Delik ölçüsü yarıçap 5mm olarak belirlenmiştir. Yükleme şekillerinin Ansys'den alınmış görüntüsü Şekil 4.2 ve Şekil 4.16 ile gösterilmiştir. Şekil 4.1Bde küçük mesh boyutları kullanılan, yarıçapı 20mm olarak belirlenen bölge gösterilmiştir. Malzeme sabitleri $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$, $\sigma_{akma} = 250$ MPa şeklinde alınmıştır.

## 4.1. Eksenel Çekmeye Maruz Delikli Plaka

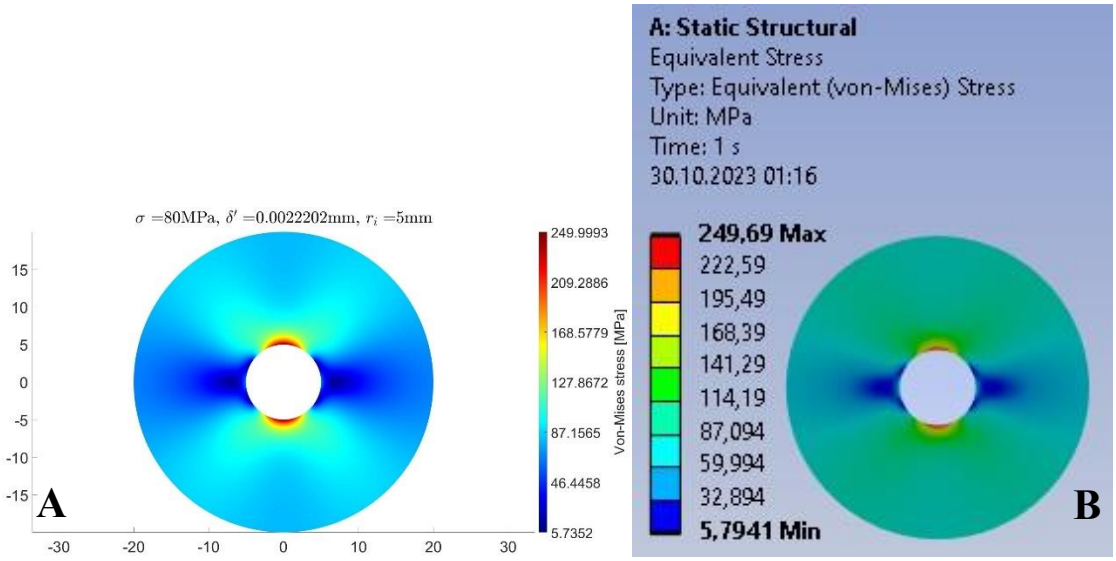
Bulunan sonuçları doğrulamak için bir sonlu elemanlar programı olan Ansys Workbench 2023 kullanılmıştır. Sınır şartları ve mesh yapısı gösterilen modeller Ansys'de iki boyutlu olarak analiz edilmiştir. Her iki yükleme durumu için de simetriden dolayı plakanın yatay ekseninin dikeyde yer değiştirmediği, dikey ekseninse yatayda yer değiştirmediği kabul edilmiştir. Şekil 4.3 ile Şekil 4.8'e kadar verilen şekillerde eksenel çekmeye maruz plakanın sonuçları, Şekil 4.9 ile Şekil 4.14'e kadar verilen şekillerde iki yönlü eksenel çekmeye maruz plakanın sonuçları gösterilmiştir. Şekillerin A kısımlarında Matlab, B kısımlarında ise Ansys sonuçları verilmiştir. Karşılaştırılan bu gerilme değerleri tablo olarak Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 ile gösterilmiştir. Aynı koordinatlar kullanılarak Matlab ve Ansys'den elde edilen gerilme değerlerinin yüzde farkları belirtilmiştir.



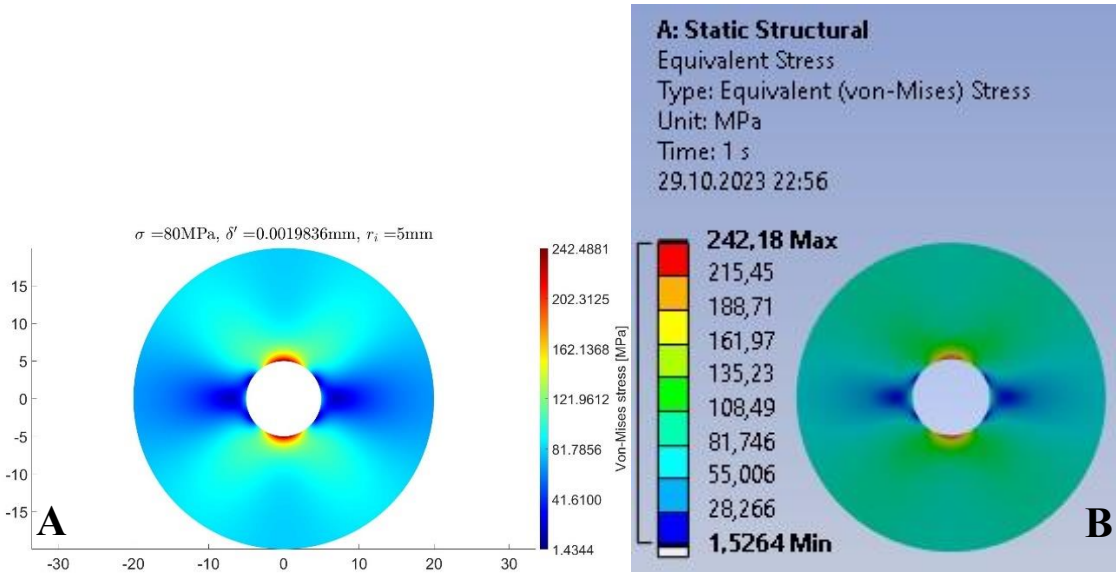

**Şekil 4.1** Eksenel çekmeye maruz plakanın mesh ağı görüntüsü
**A)** Plaka **B)** Delik çevresi



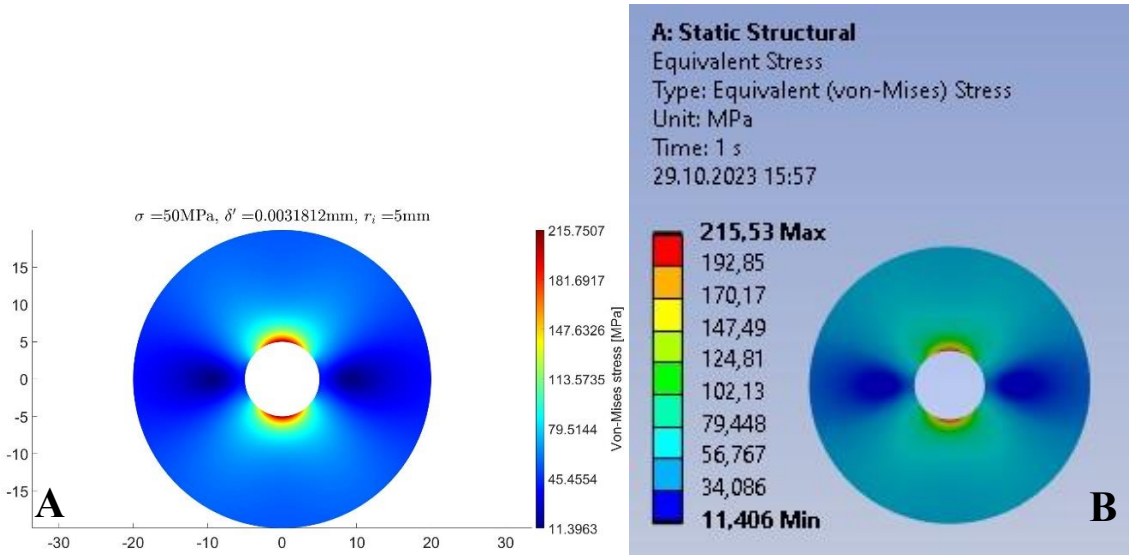

**Şekil 4.2** Ansys modelinin yükleme şekli
**A)** Eksenel çekmeye maruz plaka **B)** İki yönlü eksenel çekmeye maruz plaka



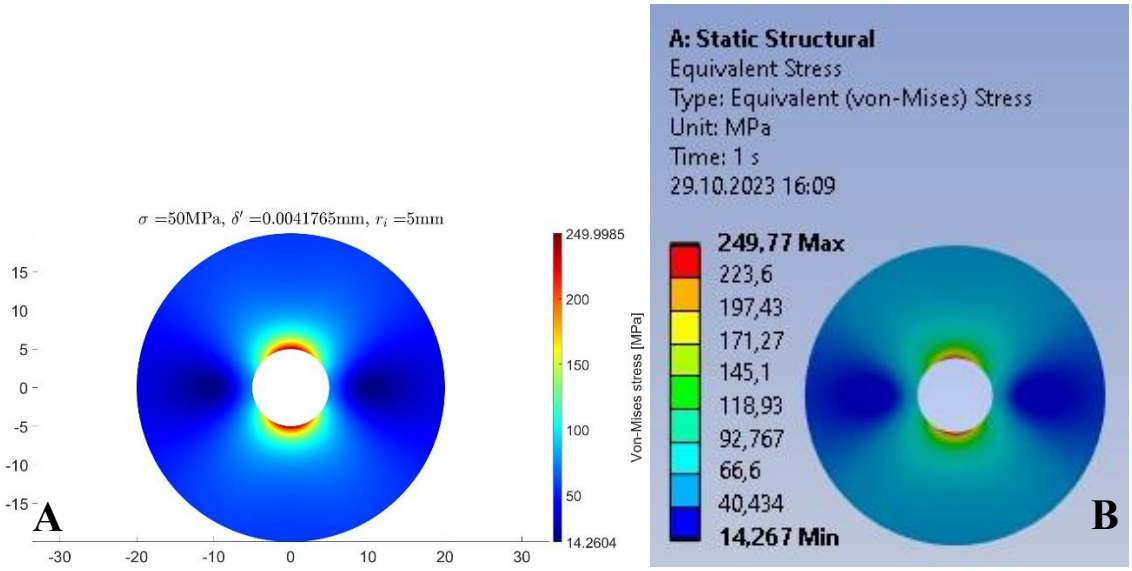

**Şekil 4.3** Eksenel çekmeye maruz plakada 80 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
**A)** Matlab **B)** Ansys



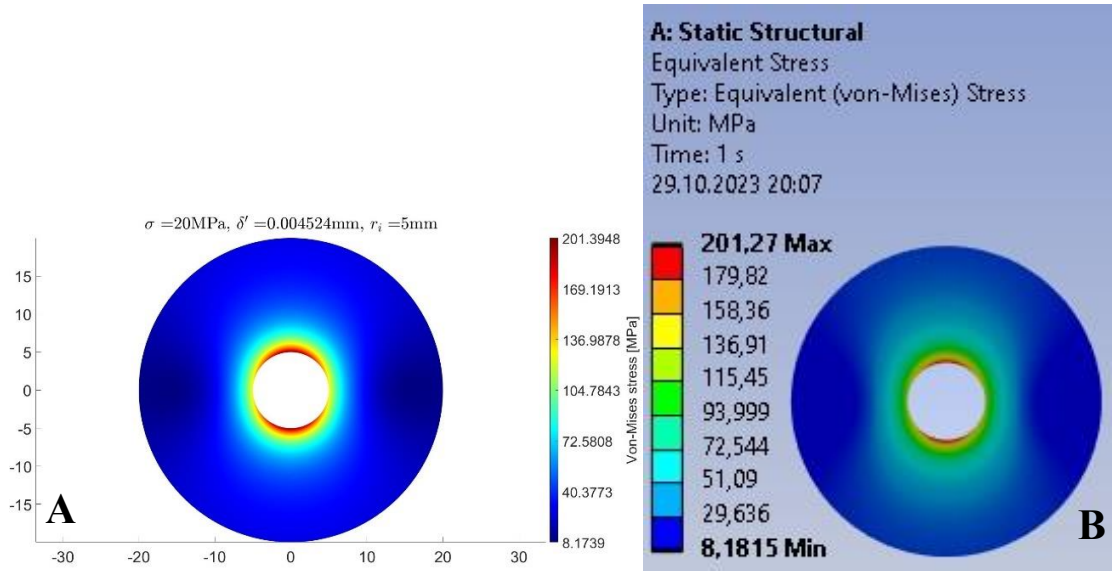

**Şekil 4.4** Eksenel çekmeye maruz plakada 80 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
**A)** Matlab **B)** Ansys



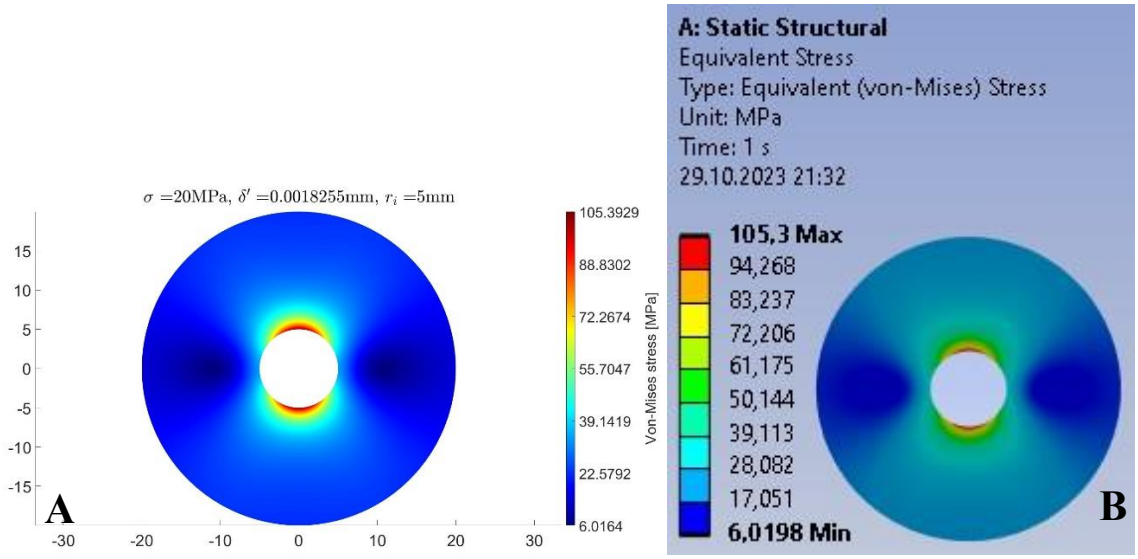

**Şekil 4.5** Eksenel çekmeye maruz plakada 50 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
**A)** Matlab **B)** Ansys




**Şekil 4.6** Eksenel çekmeye maruz plakada 50 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
**A)** Matlab **B)** Ansys



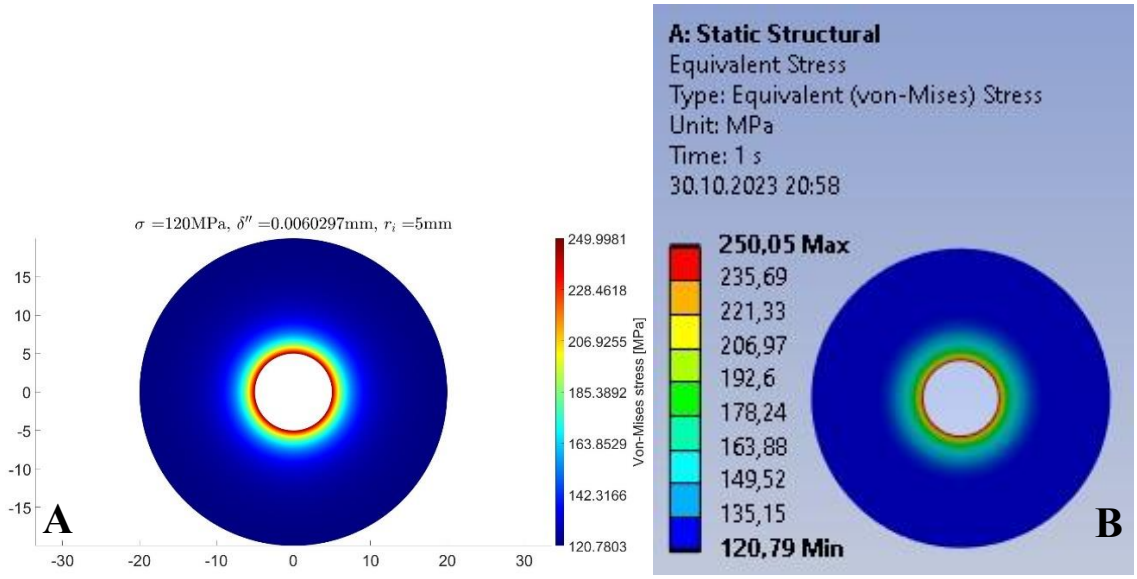

**Şekil 4.7** Eksenel çekmeye maruz plakada 20 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
**A)** Matlab **B)** Ansys



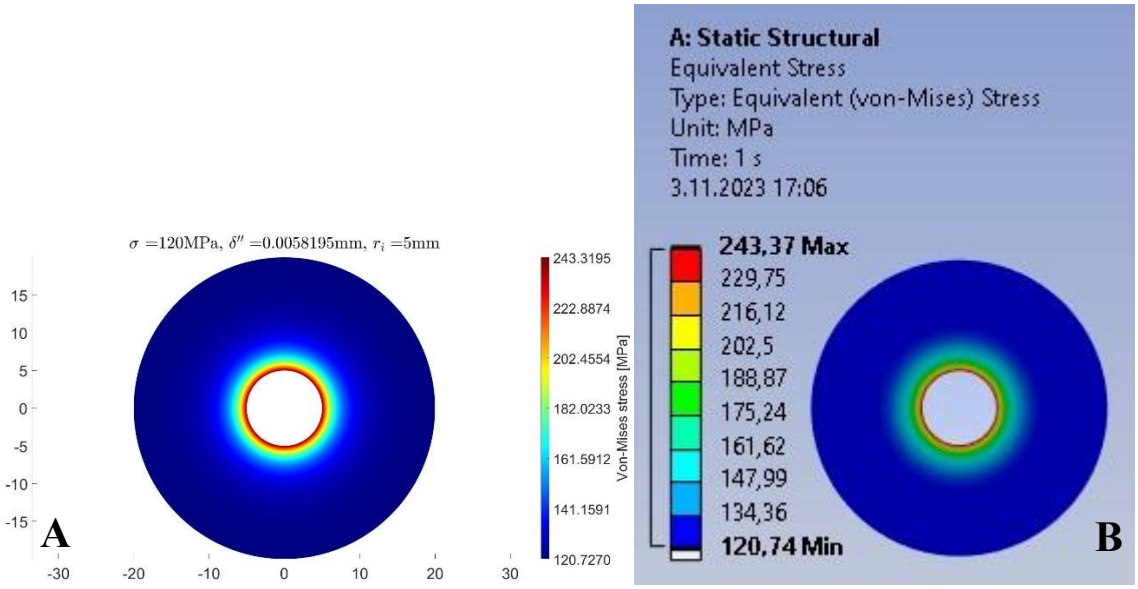

**Şekil 4.8** Eksenel çekmeye maruz plakada 20 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar
**A)** Matlab **B)** Ansys

**Çizelge 4.1** Eksenel çekmeye maruz plaka için analitik ve FEA gerilme değerlerinin karşılaştırılması

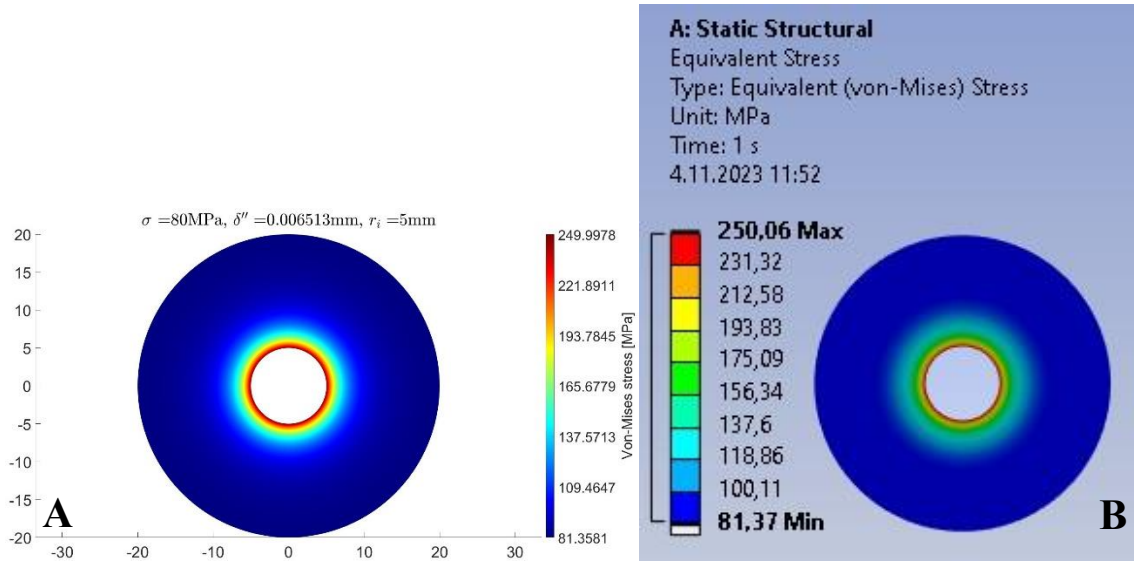
| | | Von-Mises Gerilmesi [MPa] | | | | Von-Mises Gerilmesi [MPa] | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Koordinat$(x, y)$[mm] | Teori | FEM | % Fark | Koordinat$(x, y)$[mm] | Teori | FEM | % Fark |
| $\sigma = 80$ MPa $\delta' = 0{,}0022202$ mm | (-0,00157111, 5,000) | 249,999 | 249,68 | -0,127 | (4,99842, 0,125676) | 70,09 | 69,633 | -0,656 |
| | (0,0818222, 5,53994) | 191,458 | 191,36 | -0,051 | (5,75059, 0,0433679) | 30,248 | 30,122 | -0,418 |
| | (0,167451, 6,12384) | 154,295 | 154,4 | 0,068 | (6,59146, 0,0414242) | 13,375 | 13,422 | 0,350 |
| | (0,166964, 6,72465) | 131,306 | 131,26 | -0,035 | (7,22126, 0,118003) | 12,342 | 12,366 | 0,194 |
| | (0,164681, 7,82109) | 108,364 | 108,4 | 0,033 | (7,79191, 0,117532) | 16,102 | 16,145 | 0,266 |
| $\sigma = 80$ MPa $\delta' = 0{,}0019836$ mm | (0,0864068, 4,99925) | 242,393 | 241,74 | -0,270 | (4,99981, -0,04399) | 77,504 | 77,1 | -0,523 |
| | (-0,00174, 5,54054) | 185,689 | 185,83 | 0,075 | (5,41887, -0,129432) | 49,145 | 49,562 | 0,841 |
| | (-0,08662, 6,12551) | 149,831 | 149,94 | 0,072 | (6,25766, -0,212441) | 22,697 | 22,717 | 0,088 |
| | (-0,002165, 6,89189) | 123,24 | 123,34 | 0,081 | (6,84347, -0,215108) | 16,964 | 17,01 | 0,270 |
| | (-0,002429, 7,73273) | 107,026 | 107,03 | 0,003 | (7,70261, 0,03872) | 18,521 | 18,514 | -0,037 |
| $\sigma = 50$ MPa $\delta' = 0{,}0041765$ mm | (0,086406, 4,99925) | 249,94 | 249,37 | -0,228 | (4,99842, -0,12567) | 69,9813 | 70,12 | 0,197 |
| | (-0,085303, 5,53988) | 194,056 | 194,01 | -0,023 | (5,75059, 0,043368) | 64,044 | 64,092 | 0,074 |
| | (0,081756, 6,0505) | 159,762 | 159,75 | -0,007 | (6,59146, 0,041424) | 51,057 | 51,071 | 0,027 |
| | (-0,084531, 6,56102) | 136,175 | 136,21 | 0,025 | (6,9357, 0,130777) | 45,612 | 45,561 | -0,111 |
| | (-0,0023495, 7,4774) | 109,256 | 109,27 | 0,012 | (7,51965, 0,207983) | 36,998 | 36,991 | -0,018 |
| $\sigma = 50$ MPa $\delta' = 0{,}0031812$ mm | (-0,171218, 4,99707) | 215,52 | 215,06 | -0,213 | (5,07347, 0,127563) | 38,700 | 38,642 | -0,150 |
| | (0,08670, 5,87023) | 146,18 | 146,28 | 0,068 | (5,75059, 0,043367) | 37,639 | 37,69 | 0,135 |
| | (0,0817566, 6,0505) | 137,115 | 137,11 | -0,003 | (6,26114, 0,039348) | 33,596 | 33,626 | 0,089 |
| | (0,081327, 6,63614) | 114,819 | 114,88 | 0,053 | (6,77164, -0,042556) | 28,475 | 28,492 | 0,059 |
| | (0,0804175, 7,31187) | 98,062 | 98,09 | 0,028 | (7,44629, 0,131042) | 21,739 | 21,701 | -0,175 |
| $\sigma = 20$ MPa $\delta' = 0{,}004524$ mm | (0,168077, 4,99717) | 201,311 | 200,97 | -0,169 | (4,99842, 0,125676) | 130,292 | 130,21 | -0,062 |
| | (-0,001740, 5,54054) | 159,724 | 159,86 | 0,085 | (5,49132, 0,21407) | 112,193 | 112,19 | -0,002 |
| | (-0,085559, 6,05045) | 132,337 | 132,34 | 0,002 | (6,00229, 0,211325) | 95,870 | 95,862 | -0,008 |
| | (0,0886542, 6,56096) | 112,343 | 112,35 | 0,006 | (6,51639, 0,0409524) | 81,933 | 81,936 | 0,003 |
| | (0,0886877, 7,23669) | 93,213 | 93,164 | -0,052 | (7,18601, 0,298227) | 66,86 | 66,907 | 0,070 |
| $\sigma = 20$ MPa $\delta' = 0{,}0018255$ mm | (-0,083765, 5,02933) | 103,763 | 103,68 | -0,080 | (5,07347, 0,127563) | 33,188 | 33,158 | -0,090 |
| | (0,0855917, 5,79516) | 74,03 | 74,01 | -0,027 | (5,49132, 0,21407) | 31,472 | 31,493 | 0,066 |
| | (0,167451, 6,12384) | 65,776 | 65,813 | 0,056 | (6,0947, 0,130246) | 27,374 | 27,35 | -0,087 |
| | (0,424002, 6,63812) | 55,973 | 55,997 | 0,042 | (6,77164, 0,042556) | 22,337 | 22,343 | 0,026 |
| | (0,258133, 7,3979) | 46,71 | 46,73 | 0,0427 | (7,52152, 0,122909) | 17,234 | 17,217 | -0,098 |



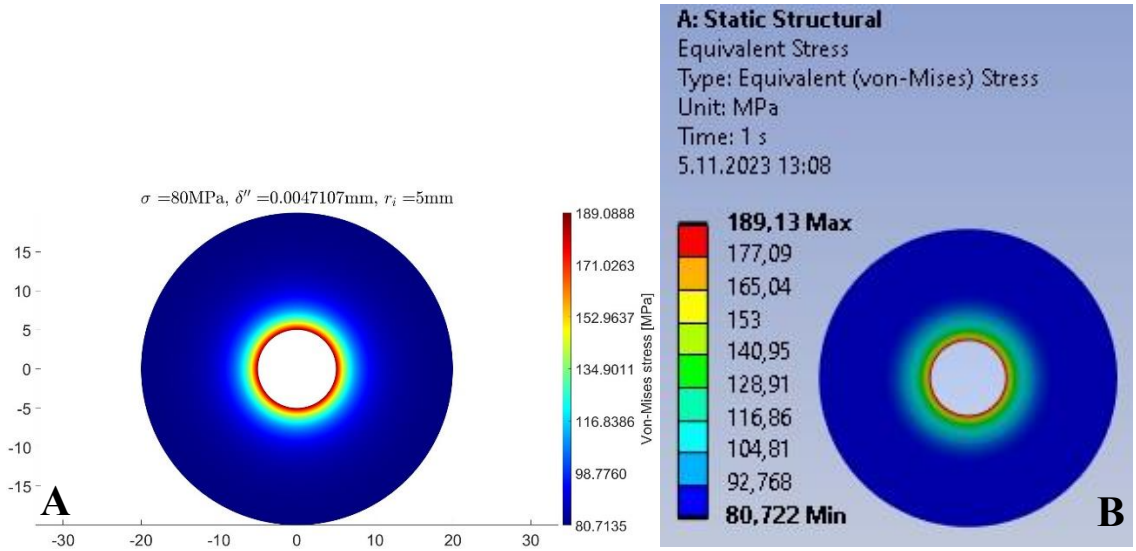

**Şekil 4.9** İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 120 MPa ve $\delta''$ için sonuçlar
**A)** Matlab **B)** Ansys



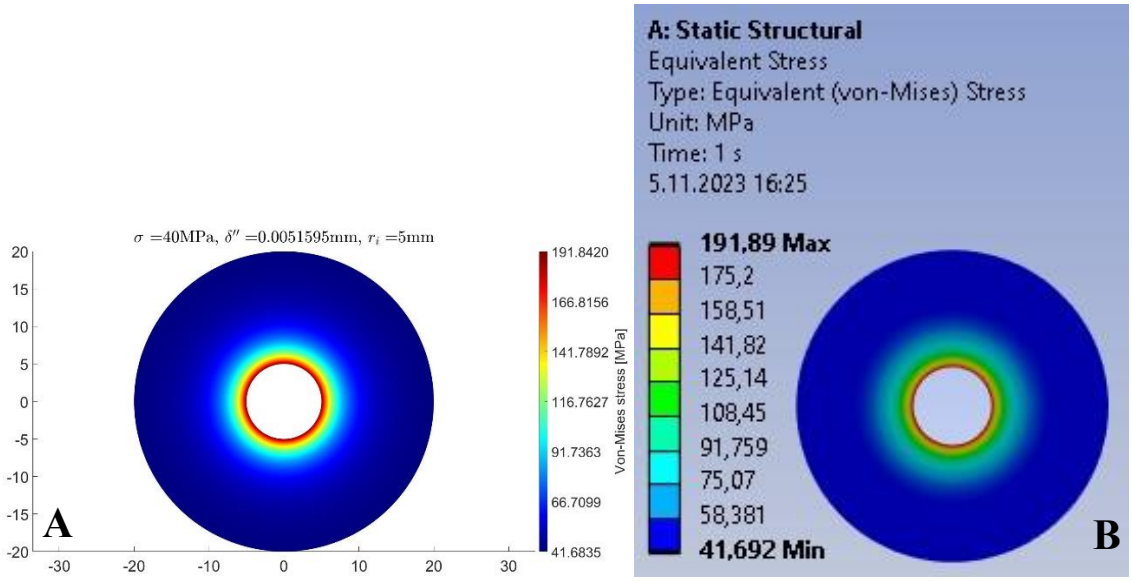

**Şekil 4.10** İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 120 MPa ve $\delta''$ için sonuçlar
**A)** Matlab **B)** Ansys



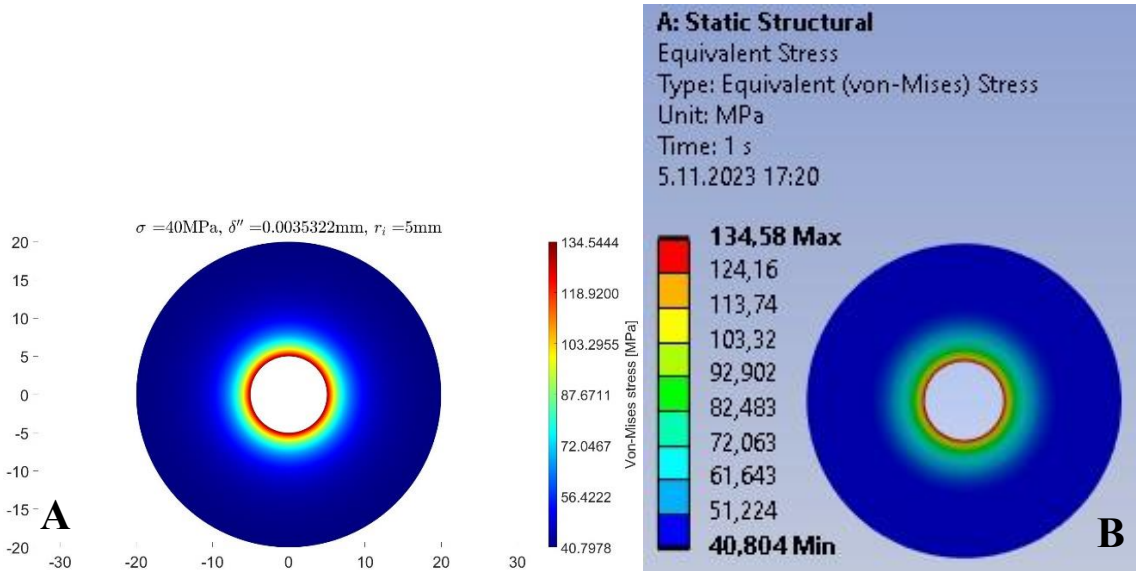

**Şekil 4.11** İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 80 MPa ve $\delta''$ için sonuçlar
**A)** Matlab **B)** Ansys




**Şekil 4.12** İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 80 MPa ve $\delta''$ için sonuçlar
**A)** Matlab **B)** Ansys




**Şekil 4.13** İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 40 MPa ve $\delta''$ için sonuçlar **A)** Matlab **B)** Ansys




**Şekil 4.14** İki yönlü eksenel çekmeye maruz plakada 40 MPa ve $\delta''$ için sonuçlar **A)** Matlab **B)** Ansys

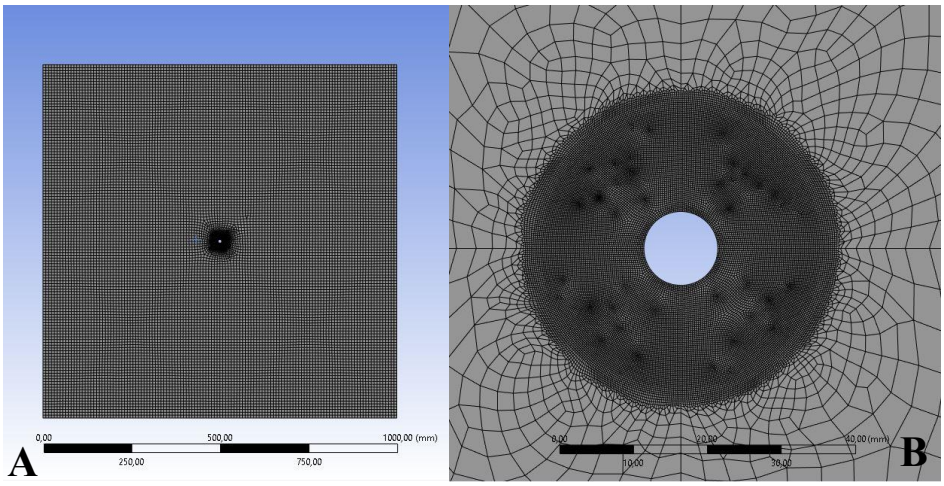
**Çizelge 4.2** İki yönlü eksenel çekmeye maruz plaka için analitik ve FEA gerilme değerlerinin karşılaştırılması

| | | Von-Mises Gerilmesi [MPa] | | | | Von-Mises Gerilmesi [MPa] | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Koordinat$(x, y)$[mm] | Teori | FEM | % Fark | Koordinat$(x, y)$[mm] | Teori | FEM | % Fark |
| $\sigma = 120$ MPa $\delta'' = 0{,}0060297$ mm | (-0,00157111, 5,000) | 249,998 | 249,94 | -0,023 | (4,99842, 0,125676) | 249,998 | 249,74 | -0,103 |
| | (0,172327, 5,53786) | 215,177 | 215,12 | -0,026 | (5,58416, 0,126357) | 212,802 | 212,8 | -0,001 |
| | (-0,001821, 5,7958) | 202,588 | 202,71 | 0,060 | (6,00464, 0,128321) | 193,658 | 193,57 | -0,045 |
| | (-0,002005, 6,38138) | 180,356 | 180,49 | 0,074 | (6,4263, 0,0403862) | 178,956 | 179,01 | 0,030 |
| | (0,170542, 7,23523) | 159,241 | 159,21 | -0,019 | (7,18919, 0,207886) | 160,109 | 160,08 | -0,018 |
| $\sigma = 120$ MPa $\delta'' = 0{,}0058195$ mm | (0,168077, 4,99717) | 243,319 | 243,1 | -0,090 | (4,99842, 0,125676) | 243,319 | 243,07 | -0,102 |
| | (0,252364, 5,45964) | 213,969 | 214,08 | 0,051 | (5,49132, 0,21407) | 212,373 | 212,35 | -0,010 |
| | (0,168279, 5,88348) | 194,247 | 194,28 | 0,016 | (6,00464, 0,128321) | 189,528 | 189,45 | -0,041 |
| | (0,0862197, 6,3808) | 176,88 | 176,91 | 0,016 | (6,51304, 0,212916) | 172,999 | 173,01 | 0,006 |
| | (0,170542, 7,23523) | 156,867 | 156,84 | -0,017 | (7,01144, 0,46776) | 160,887 | 160,89 | 0,001 |
| $\sigma = 80$ MPa $\delta'' = 0{,}006513$ mm | (0,0864068, 4,99925) | 249,998 | 249,71 | -0,115 | (4,99981, 0,0439905) | 249,998 | 249,79 | -0,083 |
| | (0,0818222, 5,53994) | 208,823 | 208,75 | -0,034 | (5,65921, 0,128056) | 201,365 | 201,34 | -0,012 |
| | (0,165399, 6,04879) | 180,423 | 180,39 | -0,018 | (6,25766, 0,212441) | 170,919 | 170,92 | 0,0005 |
| | (0,253537, 6,55666) | 159,107 | 159,21 | 0,064 | (6,60335, 0,20756) | 157,494 | 157,53 | 0,022 |
| | (0,249232, 7,1428) | 140,844 | 140,92 | 0,053 | (7,101, 0,124965) | 142,06 | 142,07 | 0,007 |
| $\sigma = 80$ MPa $\delta'' = 0{,}0047107$ mm | (0,168077, 4,99717) | 189,088 | 188,9 | -0,099 | (4,99842, 0,125676) | 189,088 | 188,88 | -0,110 |
| | (-0,001769, 5,63063) | 157,012 | 157,2 | 0,119 | (5,52441, 0,111112) | 161,498 | 161,42 | -0,048 |
| | (0,167451, 6,12384) | 139,377 | 139,4 | 0,016 | (6,2753, 0,110434) | 134,995 | 134,96 | -0,025 |
| | (0,173067, 6,63438) | 125,925 | 125,95 | 0,019 | (6,60385, 0,19096) | 126,611 | 126,63 | 0,015 |
| | (0,170542, 7,23523) | 114,401 | 114,37 | -0,027 | (7,35479, 0,194172) | 112,523 | 112,53 | 0,006 |
| $\sigma = 40$ MPa $\delta'' = 0{,}0051595$ mm | (0,262255, 4,99312) | 191,842 | 191,74 | -0,053 | (4,9909, 0,30147) | 191,842 | 191,68 | -0,084 |
| | (0,252364, 5,45964) | 162,043 | 162,16 | 0,072 | (5,58416, 0,126357) | 155,577 | 155,58 | 0,001 |
| | (0,424711, 6,05118) | 133,601 | 133,59 | -0,008 | (6,25766, 0,212441) | 126,158 | 126,16 | 0,001 |
| | (0,256438, 6,63168) | 113,761 | 113,86 | 0,086 | (6,67838, 0,209919) | 112,422 | 112,39 | -0,028 |
| | (0,252374, 7,23284) | 98,081 | 98,075 | -0,006 | (7,02383, 0,21194) | 103,071 | 103,07 | -0,0009 |
| $\sigma = 40$ MPa $\delta'' = 0{,}0035322$ mm | (0,237149, 4,99437) | 134,544 | 134,51 | -0,025 | (4,9927, 0,270099) | 134,544 | 134,49 | -0,040 |
| | (0,310291, 5,63711) | 108,408 | 108,46 | 0,047 | (5,59738, 0,190025) | 109,922 | 109,96 | 0,034 |
| | (0,157405, 6,03398) | 96,798 | 96,763 | -0,036 | (6,06499, 0,114359) | 96,006 | 96,002 | -0,004 |
| | (0,150059, 6,72505) | 81,470 | 81,438 | -0,039 | (6,60385, 0,19096) | 83,749 | 83,76 | 0,013 |
| | (0,149509, 7,10053) | 75,193 | 75,207 | 0,018 | (7,37153, 0,111191) | 71,354 | 71,359 | 0,007 |

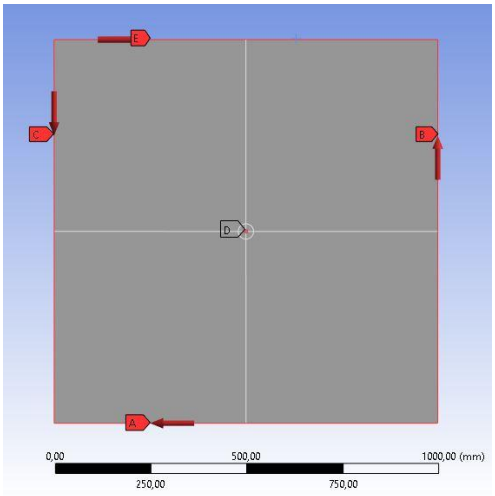
Yukarıda verilen Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 Matlab ve Ansys'den elde edilen gerilme dağılımlarının benzerliğini doğrulamak için verilmiştir. Tabloda alınan noktalar, plakada meydana gelecek maksimum ve minimum gerilmelerin oluşacağı $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = 0$ doğrultuları civarından alınmıştır.

## 4.2. Kaymaya Maruz Delikli Plaka

Şekil 4.15 ile mesh görüntüsü ve Şekil 4.16 ile yükleme şekilleri verilen model Ansys'de analiz tipi 2D seçilerek çözdürülmüştür. Analiz ayarları kısmında zayıf yaylar (weak springs) özelliği program kontrolüne bırakılmıştır. Yükleme şekline bağlı olarak analiz edilen plakada sabit kalan bir nokta bulunmamaktadır. Zayıf yaylar özelliği plakayı sabit tutacak şekilde zayıf yay kuvvetleri uygulayarak hesaplama yapılmasını sağlamaktadır.

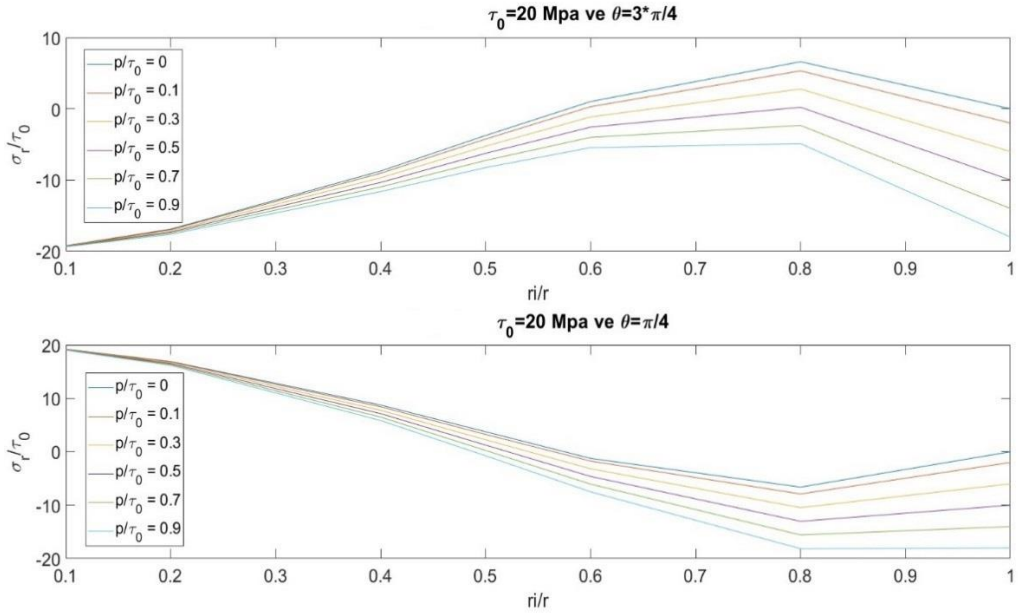



**Şekil 4.15** Kaymaya maruz plakanın mesh ağı görüntüsü
**A)** Plaka **B)** Delik çevresi

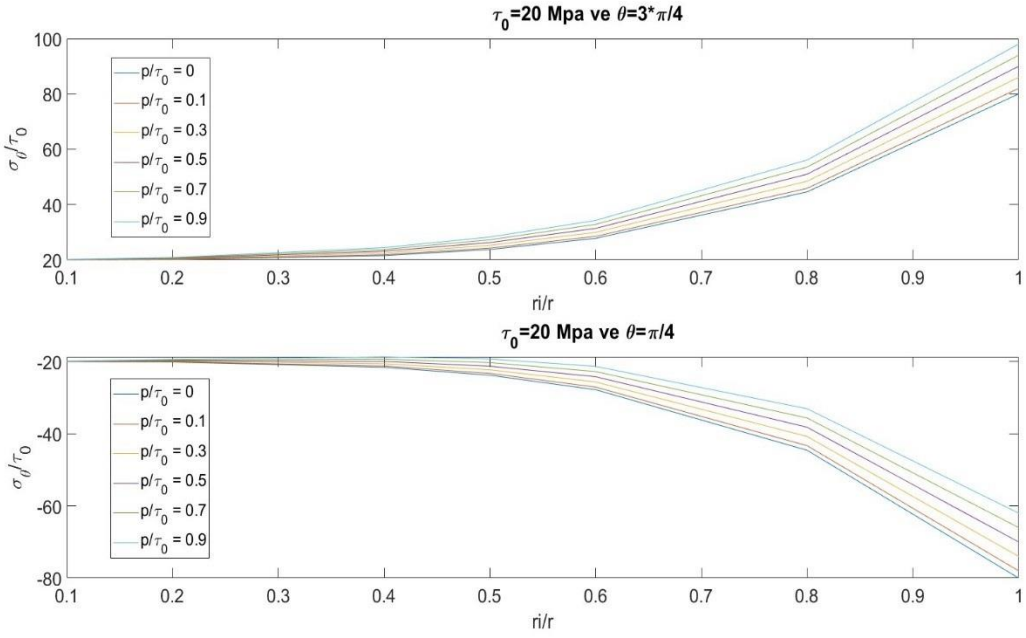



**Şekil 4.16** Ansys modelinin yükleme şekli

Aşağıda Şekil 4.17, 4.18, 4.19 ve 4.20 ile verilen şekillerde analitik yöntemle elde edilen gerilme dağılımı denklemlerinin boyutsuz hale getirilmiş, $\frac{p}{\tau_0}$ sabit oranlı grafikleri verilmiştir.

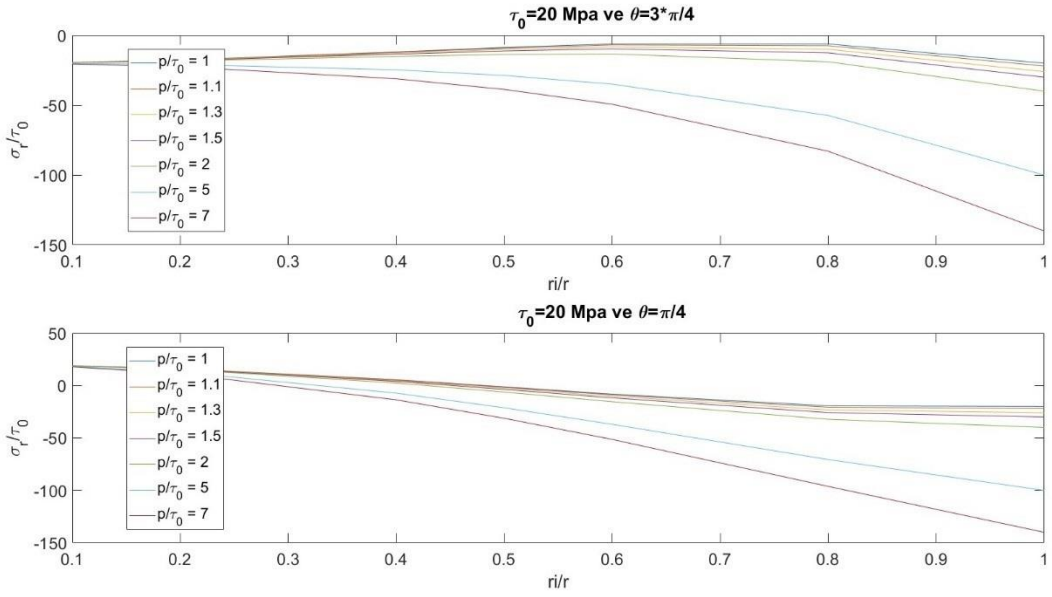



**Şekil 4.17** $p/\tau_0$ değerleri için $\sigma_r/\tau_0$ ın $r_i/r$ ile değişimi

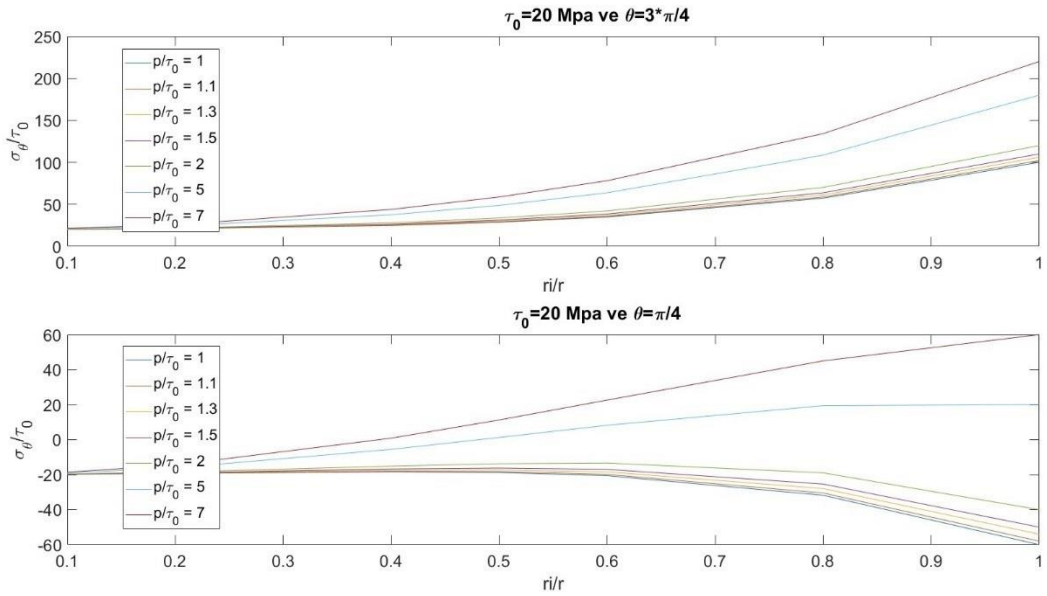



**Şekil 4.18** $p/\tau_0$ değerleri için $\sigma_\theta/\tau_0$ ın $r_i/r$ ile değişimi

Verilen boyutsuz grafikler incelendiğinde $\frac{r_i}{r} = 1$ için, delik kenarında $\sigma_r$ ve $\sigma_\theta$ değerlerinin beklenildiği gibi maksimum olduğu görülür. Eksenel çekmeye maruz delikli bir plakada gerilmelerin maksimum doğrultuları $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta = \frac{3\pi}{2}$ yani düşey doğrultuda olacağı bölüm 3.1.2 de bahsedilmişti. Ele alınan bu problemde gerilmelerin maksimum olacağı doğrultular $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \frac{7\pi}{4}$ olarak, gerilmelerin minimum olacağı doğrultular ise $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{5\pi}{4}$ olarak belirlenmiştir. Şimdi Şekil 4.17 ve Şekil 4.18 incelendiğinde farklı $\theta$ değerlerinde aynı $\frac{r_i}{r}$ ve $\frac{p}{\tau_0}$ değerleri için $\frac{\sigma_r}{\tau_0}$ ve $\frac{\sigma_\theta}{\tau_0}$ değerlerinin farklı olduğu görülür. Bunun sebebi $\tau_0$ gerilmesinden dolayı $\theta = \frac{3\pi}{4}$ doğrultusunda delik kenarının daralmaya, $\theta = \frac{\pi}{4}$ doğrultusunda ise delik kenarının genişlemeye maruz kalmasıdır. Şekil 4.19 ve Şekil 4.20 incelendiğinde $\frac{p}{\tau_0} > 4$ değerinden sonra $\theta = \frac{\pi}{4}$ doğrultusunda $\sigma_\theta$ hızla büyüyerek işaret değiştirmektedir. Bunun anlamı $\tau_0$ gerilmesinin $\theta = \frac{\pi}{4}$ de sağladığı genişleme, $\frac{p}{\tau_0} > 4$ yani yaklaşık dört kat olduğunda ortadan kalkmaktadır.

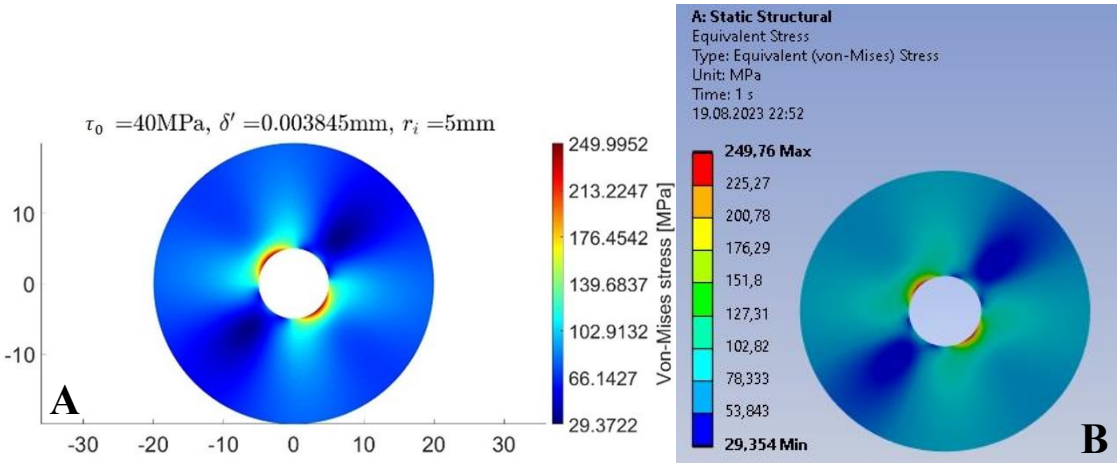



**Şekil 4.19** $p/\tau_0$ değerleri için $\sigma_r/\tau_0$ ın $r_i/r$ ile değişimi

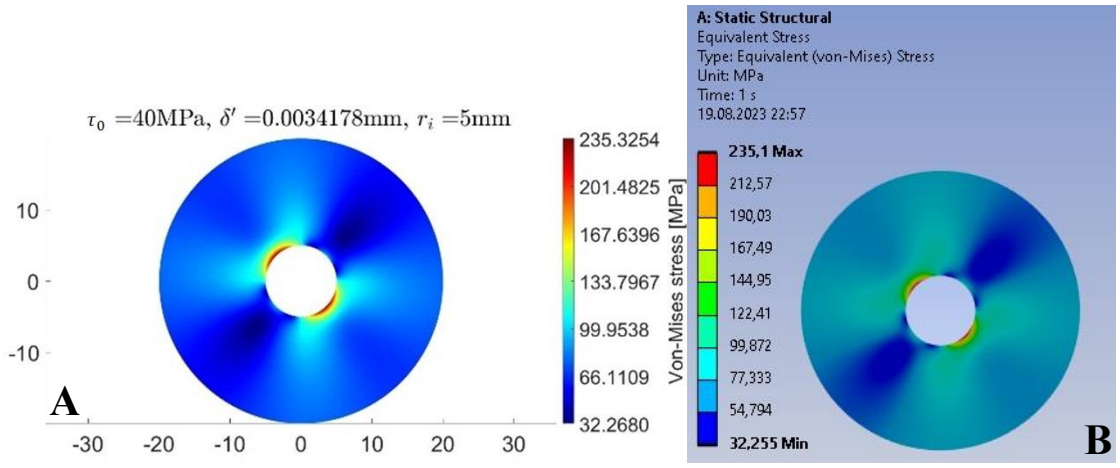



**Şekil 4.20** $p/\tau_0$ değerleri için $\sigma_\theta/\tau_0$ ın $r_i/r$ ile değişimi

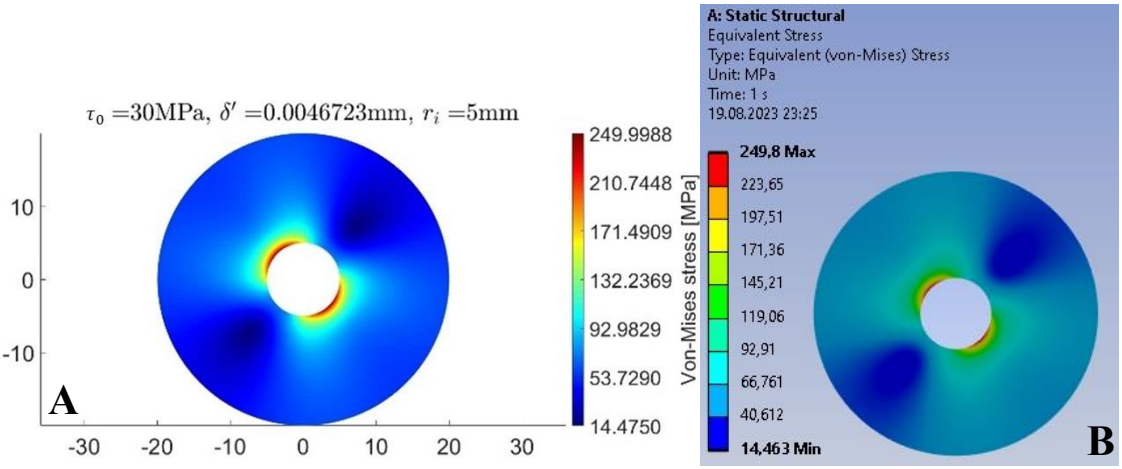
Özellikle $\frac{r_i}{r}$ oranına dikkat ederek yukarıdaki grafikler incelendiğinde oran küçüldükçe gerilme değerlerinin plaka kenarlarında mevcut olan $\tau_0$ değerine yaklaştığı görülmektedir. Bu klasik teoriye göre beklenilen bir sonuçtur. Şekil 4.21'den Şekil 4.26'ya kadar verilen şekillerin A kısımlarında Matlab, B kısımlarında ise Ansys sonuçları verilmiştir.



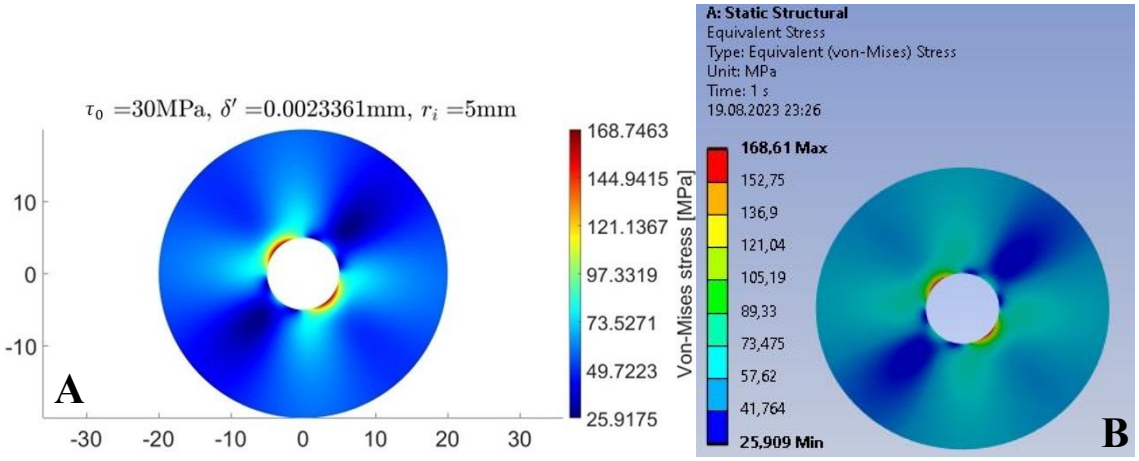

**Şekil 4.21** Kaymaya maruz plakada 40 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar **A)** Matlab **B)** Ansys



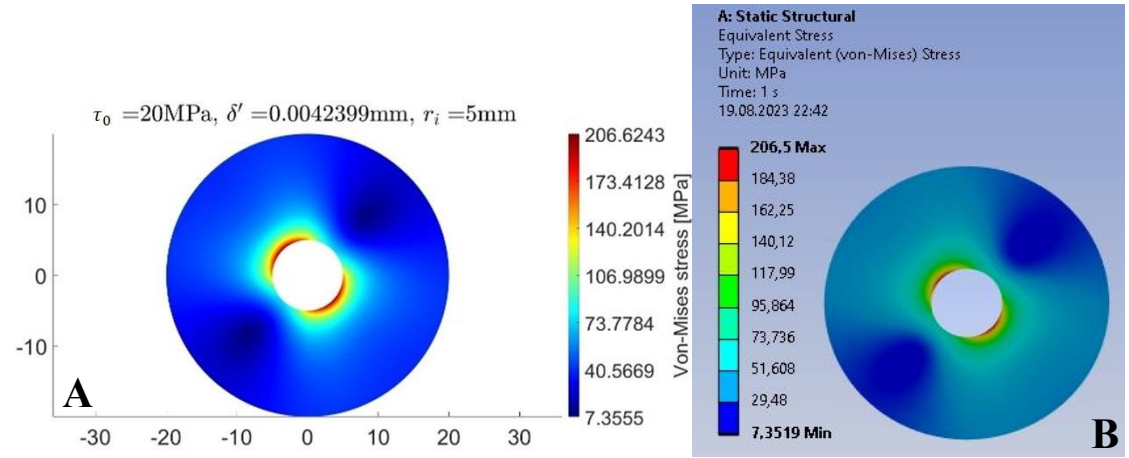

**Şekil 4.22** Kaymaya maruz plakada 40 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar **A)** Matlab **B)** Ansys



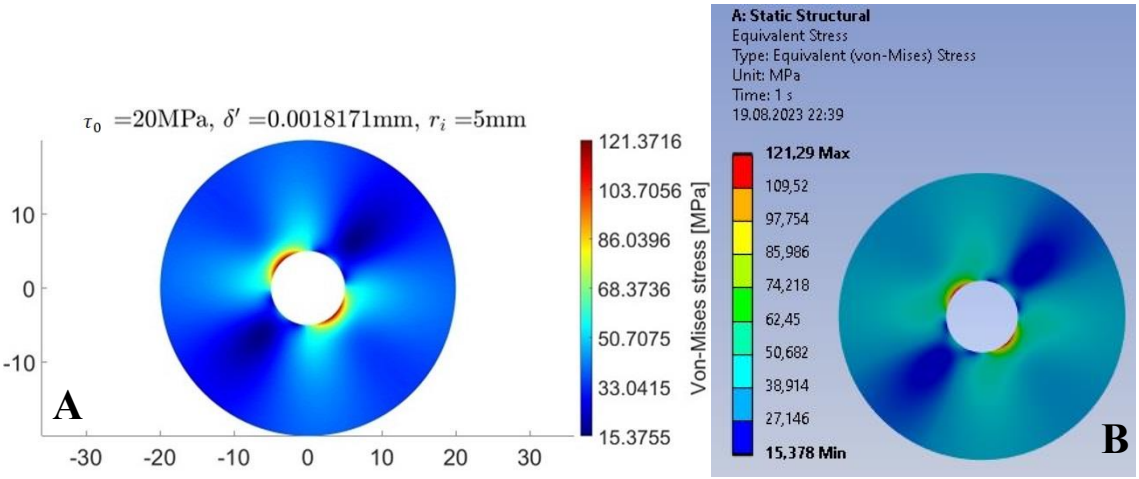

**Şekil 4.23** Kaymaya maruz plakada 30 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar **A)** Matlab **B)** Ansys




**Şekil 4.24** Kaymaya maruz plakada 30 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar **A)** Matlab **B)** Ansys




**Şekil 4.25** Kaymaya maruz plakada 20 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar **A)** Matlab **B)** Ansys




**Şekil 4.26** Kaymaya maruz plakada 20 MPa ve $\delta'$ için sonuçlar **A)** Matlab **B)** Ansys

**Çizelge 4.3** Kaymaya maruz plaka için analitik ve FEA gerilme değerlerinin karşılaştırılması

| | | Von-Mises Gerilmesi [MPa] | | | | Von-Mises Gerilmesi [MPa] | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Koordinat$(x, y)$[mm] | Teori | FEM | % Fark | Koordinat$(x, y)$[mm] | Teori | FEM | % Fark |
| $\tau_0 = 40$ MPa $\delta' = 0{,}003845$ mm | (-3,52548, 3,56671) | 247,715 | 247,43 | -0,115 | (3,60165, 3,63919) | 82,891 | 83,085 | 0,233 |
| | (-3,75165, 3,48436) | 232,458 | 232,39 | -0,029 | (3,97946, 3,94089) | 64,981 | 64,893 | -0,135 |
| | (-3,97699, 3,94339) | 180,824 | 180,81 | -0,007 | (4,28683, 4,39735) | 53,1644 | 53,116 | -0,091 |
| | (-4,43546, 4,39799) | 138,636 | 138,85 | 0,154 | (4,66377, 4,70055) | 45,653 | 45,661 | 0,017 |
| | (5,11784, 5,0746) | 105,332 | 105,38 | 0,045 | (5,26657, 5,3081) | 36,1142 | 36,107 | -0,019 |
| $\tau_0 = 40$ MPa $\delta' = 0{,}0034178$ mm | (-3,67463, 3,41284) | 232,828 | 232,35 | -0,205 | (3,52772, 3,56449) | 96,4887 | 96,447 | -0,043 |
| | (-3,90194, 4,01766) | 169,266 | 169,34 | 0,043 | (3,74994, 3,9347) | 74,2748 | 74,245 | -0,040 |
| | (-4,2804, 4,17019) | 143,435 | 143,49 | 0,038 | (4,05569, 4,24482) | 60,7576 | 60,736 | -0,035 |
| | (-4,65839, 4,47048) | 120,522 | 120,58 | 0,048 | (4,28494, 4,84967) | 49,4995 | 49,539 | 0,079 |
| | (-5,18155, 4,92273) | 99,7957 | 99,792 | -0,003 | (5,18973, 5,52831) | 37,2409 | 37,233 | -0,021 |
| $\tau_0 = 30$ MPa $\delta' = 0{,}0046723$ mm | (-3,59447, 3,4756) | 249,951 | 249,38 | -0,228 | (3,45076, 3,63905) | 69,305 | 69,301 | -0,005 |
| | (-3,97336, 3,86134) | 190,095 | 190,29 | 0,102 | (3,74994, 3,9347) | 65,7976 | 65,82 | 0,034 |
| | (-4,05363, 4,16337) | 169,141 | 169,33 | 0,111 | (4,04902, 4,31318) | 60,0305 | 60,074 | 0,072 |
| | (-4,4283, 4,46884) | 141,337 | 141,53 | 0,136 | (4,69268, 4,7775) | 48,3466 | 48,384 | 0,077 |
| | (-5,11784, 5,0746) | 108,746 | 108,80 | 0,049 | (5,19065, 5,0001) | 40,8241 | 40,779 | -0,110 |
| $\tau_0 = 30$ MPa $\delta' = 0{,}0023361$ mm | (-3,62923, 3,43928) | 168,617 | 168,12 | -0,295 | (3,35747, 3,70505) | 77,5434 | 77,563 | 0,025 |
| | (-4,12758, 3,78548) | 120,715 | 120,59 | -0,103 | (3,67006, 4,00931) | 58,715 | 58,684 | -0,052 |
| | (-4,5829, 4,08786) | 95,7674 | 95,627 | -0,146 | (4,05569, 4,24482) | 47,6883 | 47,679 | -0,019 |
| | (-5,10989, 4,46648) | 77,9449 | 77,895 | -0,064 | (4,35184, 4,54333) | 40,6031 | 40,56 | -0,106 |
| | (-5,34483, 5,07786) | 67,8041 | 67,816 | 0,017 | (5,03816, 5,29971) | 30,7546 | 30,766 | 0,037 |
| $\tau_0 = 20$ MPa $\delta' = 0{,}0042399$ mm | (-3,62923, 3,43928) | 206,544 | 206,07 | -0,230 | (3,32004, 3,73862) | 75,9898 | 75,946 | -0,057 |
| | (-3,97336, 3,86134) | 159,167 | 159,32 | 0,096 | (3,67449, 3,94391) | 71,7717 | 71,737 | -0,048 |
| | (-4,2804, 4,17019) | 133,442 | 133,45 | 0,005 | (4,13123, 4,40076) | 62,0412 | 62,076 | 0,056 |
| | (-4,73423, 4,54326) | 109,419 | 109,55 | 0,119 | (4,73313, 4,84297) | 50,0094 | 50,044 | 0,069 |
| | (-5,34483, 5,07786) | 88,0834 | 88,091 | 0,008 | (5,26657, 5,3081) | 39,5049 | 39,531 | 0,066 |
| $\tau_0 = 20$ MPa $\delta' = 0{,}0018171$ mm | (-3,40147, 3,6647) | 121,208 | 120,88 | -0,271 | (3,55271, 3,51827) | 46,63 | 46,553 | -0,165 |
| | (-3,66754, 4,01162) | 94,847 | 94,737 | -0,116 | (3,75119, 4,0161) | 34,7981 | 34,824 | 0,074 |
| | (-4,2804, 4,17019) | 74,262 | 74,28 | 0,024 | (4,05316, 4,47277) | 27,9074 | 27,904 | -0,012 |
| | (-4,81006, 4,61603) | 58,5386 | 58,519 | -0,033 | (4,58543, 4,92165) | 22,4314 | 22,423 | -0,037 |
| | (-5,41784, 5,30496) | 47,1926 | 47,223 | 0,064 | (5,11094, 5,45811) | 18,5482 | 18,556 | 0,042 |

Matlab çözümlerini elde etmek için 3.36, 3.49, 3.52 ve 3.57 denklemleri birlikte kullanılmıştır. Girinti miktarları alt ve üst limitler dahilinde rastgele alınmıştır. Yukarıda verilen Şekil 4.21'den Şekil 4.26'ya kadar olan şekillerdeki gerilme dağılımlarının karşılaştırılması Çizelge 4.3 ile verilmiştir. Matlab ve Ansys'den elde edilen sonuçlar dikkatle incelenmiş ve karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.3 de belirtilen koordinatlarda hem analitik sonuçlarla elde edilen Von-Mises gerilme değerleri hem de Ansys ile elde edilen Von-Mises gerilme değerleri verilmiştir. Analitik yöntem ve FEA ile elde edilen bu sonuçlar karşılaştırılarak, aralarındaki fark yüzde olarak belirtilmiştir. Tabloda alınan koordinatlar maksimum ve minimum gerilmelerin beklendiği $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$ doğrultuları civarından alınmıştır. Tablo incelendiğinde analitik sonuçlar ile FEA sonuçlarının birbirine oldukça yakın olduğu görülmüştür. Bunun anlamı her iki yöntemle elde edilen gerilme dağılımları oldukça benzerdir. Özellikle delik kenarındaki gerilme değerleri kıyaslandığında fark oldukça az olmasına rağmen analitik sonuçlarla elde edilen sayısal değerler daha büyüktür. Bu sonuç analitik teori ile elde edilen sonuçlara olan güveni arttırmaktadır.

# 5. SONUÇ

Bu çalışmada çekme gerilmesine maruz delikli bir plakadaki girinti problemi ve kayma gerilmesine maruz delikli bir plakadaki girinti problemi analitik teori ile incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar bir sonlu elemanlar programı olan Ansys ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Airy gerilme fonksiyonu kullanılarak, çekme veya kayma gerilmesi ile yüklenmiş delikli plakadaki girinti problemine analitik çözüm aranmıştır. Gerilme dağılımını veren denklemler elde edilmiş ve bu elde edilen denklemlerden hareketle yer değiştirme analizi yapılmıştır. Yer değiştirme sonuçlarından faydalanılarak silindir çakılan delikte oluşacak basınç ifadesi bulunmuştur. Akma sınırını aşmayacak şekilde bu basınç ifadesinin maksimum olduğu bağıntı verilmiştir. Elde edilen denklemler incelendiğinde girinti miktarı için alt ve üst limitler olduğu fark edilmiş, bu alt ve üst limitler bulunmuştur. Elde edilen gerilme dağılımı denklemleri, girinti ve basınç ifadeleri Matlab programı kullanılarak çözdürülmüştür. Çözüm sonuçları karşılaştırma kolaylığı sağlaması için sonlu elemanlar programlarında olduğu gibi renk ölçeklendirmesi ile görsel olarak ifade edilmiştir. Analitik sonuçları doğrulamak için Ansys programı kullanılarak aynı problem için model oluşturulmuş ve çözdürülmüştür. Alınan çözümler dikkatle incelenmiş ve analitik sonuçlarla kıyaslanmıştır. Ansys ile çözüm aranırken kaymaya maruz plaka modelinde yükleme koşullarından dolayı sabit bir yüzey, kenar veya nokta olmadığına dikkat edilerek zayıf yaylar özelliği program kontrolüne bırakılmıştır. Zayıf yaylar özelliği kullanıldığı için Ansys sonuçlarının da doğrulaması analitik sonuçlar ile kıyaslanarak yapılmıştır. Matlab ve Ansys'den elde edilen gerilme dağılımları yan yana gösterilmiştir. Aynı koordinat değerleri için elde edilen gerilme değerleri tablo olarak verilmiş, aralarındaki fark yüzde olarak gösterilmiştir. Girinti sebebi ile oluşacak delik basıncının çekmeye maruz delikli plakada $\theta$ açısından bağımsız, kaymaya maruz delikli plakada ise $\theta$ açısına bağlı olduğu görülmüştür. Analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında özellikle delik kenarındaki sayısal değerler oldukça yakın olmasına rağmen analitik yöntem ile elde edilen değerlerin daha büyük olduğu saptanmıştır.

## KAYNAKLAR


Campos, UA. & Hall, DE. *Simplified lamé's equations to determine contact pressure and hoop stress in thin-walled press-fits. Thin-Walled Structures,* 138: 199–207. https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.02.008

Hsu, YC. & Forman, RG. (1975). *Elastic-plastic analysis of an infinite sheet having a circular hole under pressure. Journal of Applied Mechanics,* 347–352. https://doi.org/10.1115/1.3423579

J. R. Barber. (2010). *Elasticity 3rd Revised Edition*, Springer Publishers. https://doi.org/10.1007/978-90-481-3809-8

Martin, H. Sadd. (2009). *Elasticity Theory, Applications, and Numerics,* Elsevier Science Direct. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-374446-3.X0001-6

Lekhnitskii, SG. (1968). *Anisotropic plates,* Gordon and Breach Science Publishers.

Ozturk, F. (2011). *Finite-element modelling of two-disc shrink fit assembly and an evaluation of material pairs of discs. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science,* 225: 263–273. https://doi.org/10.1243/09544062JMES2354

Özel, A. Temiz, Ş. Aydin. MD, et al. (2005). *Stress analysis of shrink-fitted joints for various fit forms via finite element method. Materials & Design*, 26: 281–289. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2004.06.014

Pala, Y. & Güllü, E. (2002). *Eksenel çekmeye maruz delikli sonsuz plağa silindirik parçanın çakılması problemi. Pamukkale University Journal of Engineering Sciences,* 3:283-292.

Qiu, J. & Zhou, M. (2016). *Analytical solution for interference fit for multi-layer thick-walled cylinders and the application in crankshaft bearing design. Applied Sciences*, 6: 167. https://doi.org/10.3390/app6060167

Schlack, AL. & Little, RW. (1964). Elastostatic problem of a perforated square plate. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 90(5): 171–188. https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000535

Thompson, TR. (1965). *Elasto-static Problem of a Rectangular Plate with a Circular Hole*. (PhD Thesis). Oklahoma State University.

Timoshenko, S. & Goodier J.N. (1951). *Theory of Elasticity. 2nd Edition*, McGraw-Hill.

Venkatraman, B. & Patel, SA. (1970). *Structural Mechanics with Introductions to Elasticity and Plasticity,* McGraw-Hill.

Wang, X. Lou, Z. Wang, X et al. (2018). *Prediction of stress distribution in press-fit process of interference fit with a new theoretical model. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science,* 233: 2834–2846.
https://doi.org/10.1177/0954406218799783

Zhang, Y. McClain, B. & Fang, XD. (2000). *Design of interference fits via finite element method. International Journal of Mechanical Sciences,* 42: 1835–1850.
https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00072-7

## ÖZGEÇMİŞ

| | |
|---|---|
| Adı Soyadı | : Adnan YAKUPOĞLU |
| Doğum Yeri ve Tarihi | : Bursa – 11.09.1993 |
| Yabancı Dili | : İngilizce |
| | |
| Eğitim Durumu | |
| Lise | : Dörtçelik Teknik Lisesi – 2011 |
| Lisans | : Uludağ Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü – 2019 |
| | |
| Çalıştığı Kurum / Kurumlar: | |
| SABLE MAKİNE | (2021 – 2022) |
| SANKO HOLDİNG A. Ş | (2022-2023) |
| ETİ GIDA A. Ş | (2023-2023) |
| OYAK-RENAULT O.FAB. | (2023- …) |
| | |
| İletişim | : adnanyakupogluu@gmail.com |
| | |
| Yayınları | : |